مجموعة الأرقام في نظام العد العشري:

$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

1) مجموعة الأعداد الطبيعية

$N=\{0,1,2,3,4,5,.....\}$

2) مجموعة الأعداد الصحيحة:

$Z=\{.....-3,-2,-1,0,1,2,3,.....\}$

3) مجموعة الأعداد العادية:

العدد العادي هو كل عدد يكتب بالشكل $\frac{a}{b}$

حيث أن a **عدد صحيح و** b **عدد طبيعي لا يساوي الصفر**

مجموعة الأعداد العادية تتألف من:

1 - أعداد لكل منها كتابة عشرية منتهية

2 - أعداد لكل منها كتابة عشرية غير منتهية ودورية

وهذه الأعداد ليست عشرية بل هي أعداد دورية

فالعدد العادي قد يكون

عدد صحيح مثل: $5\ ,\ -11$

عدد كسري مثل: $4\frac{6}{7}\ ,\ -7\frac{1}{5}$

كسر عادي مثل: $\frac{6}{23}\ ,\ -\frac{7}{13}$

عدد عشري مثل: $0.235\ ,\ -0.74$

كسر عشري مثل: $\frac{7}{10}\ ,\ -\frac{3}{1000}$

عدد دوري $1.\overline{47}\ ,\ 3.2\overline{6}$ وهو عدد غير عشري

ملاحظة

العدد العشري هو كل عدد عادي يكتب بالشكل $a\times10^n$

حيث a,n **صحيحان**

نميّز العدد العشري بالطرق التالية

1. قسمة منتهية
2. المقسوم عليه هو قوة لأحد الاعداد: 2 و 5 و10
3. إذا كان مكتوب بالشكل $(a\times10^n)$

4) الأعداد غير العادية:

العدد غير العادي :هو عدد لا يمكن كتابته بالشكل $\frac{a}{b}$

الأعداد غير العادية هي أعداد لكل منها كتابة عشرية **غير منتهية** و **غير دورية**

مثال: $\pi\ ,\ \sqrt{2}\ ,\ -4\sqrt{5}\ ,\ \sqrt[3]{10}$

تدريب: بيّن طبيعة الأعداد $\pi\ ,\ \frac{22}{7}\ ,\ 3.14$

الحل: لاحظ أن العدد π غير عادي

لاحظ أن العدد $\frac{22}{7}$ كسر عادي فهو عدد عادي

لاحظ أن العدد 3.14 عدد عشري فهو عدد عادي

لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين a و b $(a>b)$ باعتماد خوارزمية إقليدس:

- نقسم a على b إقليدياً (التقسيم مع الباقي). ليكن $a=k\times b+r\ (r<b)$
- نقسم b إقليدياً على باقي القسمة في الخطوة السابقة r.
- نتابع عملية القسمة وفق هذا النمط حتى نصل إلى الخطوة التي يصبح فيها باقي القسمة صفراً.
- القاسم المشترك الأكبر هو آخر باقٍ غير معدوم.

خواص

- $GCD(a,a)=a$.
- إذا كان b قاسماً للعدد a، كان $GCD(a,b)=b$.
- القول « a و b أوليّان فيما بينهما » يعني القول « $GCD(a,b)=1$ »
- $GCD(a,b)=GCD(b,a-b)$ في حالة عددين طبيعيين $a>b$

مثال1: بطريقة اقليدس أوجد $GCD\ (10165,\ 3745)$

الباقي	المقسوم عليه	المقسوم
2675	3745	10165
1070	2675	3745
535	1070	2645
0	535	1070
GCD = 535		

مثال2:بطريقة الطرح المتتالي أوجد $GCD\ (357,\ 204)$

ناتج الطرح	المطروح	المطروح منه
153	204	357
51	153	204
102	51	153
51	51	102
0	51	51
GCD = 51		

كيف نتعرف عددين أوليين فيما بينهما؟

لتأكيد أنّ عددين هما أوليّان فيما بينهما
يكفي إثبات أنّ القاسم المشترك الأكبر لهما يساوي 1

مثال: بيّن إذا كان العددان 39 و 55 أوليّيْن فيما بينهما

القواسم الطبيعية للعدد 39 هي 1 و 3 و 13 و 39

القواسم الطبيعية للعدد 55 هي 1 و 5 و 11 و 55

القاسم المشترك الأكبر لهما هو 1، فهذان العددان أوليّان فيما بينهما

في حالة النفي، يكون سرد مثال كافياً لتأكيد النفي

يكفي إيجاد قاسم مشترك واحد لهذين العددين

بيّن إذا كان العددان 175 و 380 ليسا أوليين فيما بينهما

الحل: نلاحظ أن العددان يقبلان القسمة على العدد 5
لأن كل عدد أحاده صفر أو خمسة يقبل القسمة على 5

ملاحظة: يكون الكسر مختزل لما يكون البسط والمقام عددين أوليين فيما بينهما أي أن القاسم المشترك الأكبر لهما هو(1)

الحصول على الكسر المختزل

طريقة أولى: بتقسيم بسطه ومقامه على القاسم المشترك الأكبر لهما

مثال: : اختصر الكسر $\frac{24}{36}$

الحل: بما أن $GCD(36,24)=12$ فإن: $\frac{24}{36}=\frac{24\div12}{36\div12}=\frac{2}{3}$

طريقة ثانية بإجراء اختصارات متتالية حسب قابلية القسمة

$$\frac{24}{36}=\frac{24\div2}{36\div2}=\frac{12\div2}{18\div2}=\frac{6\div3}{9\div3}=\frac{2}{3}$$

تمرين: باستخدام خوارزمية الطرح المتتالي:

أوجد $GCD(84,60)$ واختزل الكسر $\frac{84}{60}$

ناتج الطرح	مطروح	مطروح منه
24	60	84
36	24	60
12	24	36
12	12	24
0	12	12

$GCD(84,60)=12$

$\frac{84}{60}=\frac{84\div12}{60\div12}=\frac{7}{5}$

تمرين: باستخدام خوارزمية القسمة الاقليدية

أوجد $GCD(575,215)$ واختزل الكسر $\frac{575}{215}$

باقي القسمة	المقسوم عليه	المقسوم
145	215	575
70	145	245
5	70	145
0	5	70

$GCD(575,215)=5$

$\frac{575}{215}=\frac{575\div5}{215\div5}=\frac{115}{43}$

تمرين : أوجد $GCD(224,512)$ ثم اختزل الكسر $\frac{224}{512}$

باقي القسمة	المقسوم عليه	المقسوم
64	224	512
32	64	224
0	32	64

$GCD(224,512)=32$

$\frac{224}{512}=\frac{224\div32}{512\div32}=\frac{7}{16}$

الجذر التربيعي لعدد موجب:

الجذر التربيعي لعدد موجب a هو عدد موجب b

يحقق أن $b^2=a$

هام جدا

1) الجذر التربيعي حصراً لعدد موجب

خطأ $\sqrt{-3}$ صح $\sqrt{+3}$

2) ناتج الجذر التربيعي هو عدد موجب

$\sqrt{9}=+3$, $\sqrt{9}\neq-3$

للعدد الموجب جذران تربيعيان

أحدهما موجب و الآخر سالب

للعدد 9 جذران تربيعيان هما

$+\sqrt{9}=+3$ و $-\sqrt{9}=-3$

هام جدا جدا حفظ مربعات الاعداد من 0 الى 25

لتسهل عليك ايجاد الجذور لتلك المربعات.

تبسيط الجذر التربيعي : أي كتابة $\sqrt{c}$ بالشكل $a\sqrt{b}$

لتبسيط الجذر التربيعي لعدد طبيعي نحاول كتابته بشكل جداء جذرين بحيث يكون لأحدهما جذر طبيعي مثل

$\sqrt{75}=\sqrt{25}\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$.

تركيب العدد الجذري : أي كتابة $a\sqrt{b}$ بالشكل $\sqrt{c}$

لتركيب عدد جذري نستخدم الخاصة (1) لتحويل الجزء الصحيح إلى جذر تربيعي ثم الخاصة (4) لتركيب الجذر

$2\sqrt{3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=\sqrt{12}$.

إزالة الجذر التربيعي من مقام الكسر : $\frac{a}{\sqrt{b}}$

لإزالة الجذر من مقام الكسر نضرب البسط و المقام بالجذر الموجود في المقام.

$\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

تمرين :

اكتب بصيغة $a\sqrt{b}$	اكتب بصيغة $\sqrt{c}$
$\sqrt{48}=\sqrt{16\times3}$ $\sqrt{48}=\sqrt{16}\times\sqrt{3}$ $\sqrt{48}=4\times\sqrt{3}$ $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$	$4\sqrt{5}=\sqrt{(4)^2\times\sqrt{5}}$ $4\sqrt{5}=\sqrt{(4)^2}\times\sqrt{5}$ $4\sqrt{5}=\sqrt{16}\times\sqrt{5}$ $4\sqrt{5}=\sqrt{80}$

أزل الجذر من مقام الكسر التالي :

$\frac{15}{5\sqrt{3}}=\frac{15\times\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{5\times3}=\frac{15\sqrt{3}}{15}=\sqrt{3}$

قائمة بتبسيط الجذور التربيعية (للحفظ)

حفظها يسهل العمل ويوفر الوقت في الامتحان

ملاحظة: نجمع ونطرح الجذور المتشابهة فقط

$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$	$\sqrt{63}=3\sqrt{7}$
$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$	$\sqrt{72}=6\sqrt{2}$
$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$	$\sqrt{75}=5\sqrt{3}$
$\sqrt{20}=2\sqrt{5}$	$\sqrt{80}=4\sqrt{5}$
$\sqrt{24}=2\sqrt{6}$	$\sqrt{96}=4\sqrt{6}$
$\sqrt{27}=3\sqrt{3}$	$\sqrt{108}=6\sqrt{3}$
$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$	$\sqrt{112}=4\sqrt{7}$
$\sqrt{48}=4\sqrt{3}$	$\sqrt{125}=5\sqrt{5}$
$\sqrt{44}=2\sqrt{11}$	$\sqrt{150}=5\sqrt{6}$
$\sqrt{52}=2\sqrt{13}$	$\sqrt{180}=6\sqrt{5}$

ونتعامل مع الجذور كالتعامل مع الحدود الجبرية

تمرين1: ABC مثلث أطوال أضلاعه: $AB=3\sqrt{8}$ و $BC=\sqrt{32}+2\sqrt{2}$ و $AC=\sqrt{72}$ والمطلوب:

1) أثبت أنه مثلث متساوي الأضلاع

2) احسب محيطه ومساحته

الحل:1)

$$AB=3\sqrt{8}=3\times 2\sqrt{2}$$
$$AB=\boxed{6\sqrt{2}}$$
$$AC=\sqrt{72}=\sqrt{36\times 2}$$
$$AC=\boxed{6\sqrt{2}}$$
$$BC=\sqrt{32}+2\sqrt{2}$$
$$BC=4\sqrt{2}+2\sqrt{2}$$
$$BC=\boxed{6\sqrt{2}}$$

بالموازنة نجد

$$AB=BC=AC=6\sqrt{2}$$

فالمثلث متساوي الاضلاع لتساوي أضلاعه

2) محيط مثلث متساوي الأضلاع =طول الضلع×3

ومنه $P=6\sqrt{2}\times 3=\boxed{18\sqrt{2}}\ cm$

المساحة = مربع طول الضلع × $\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$S=\frac{\left(6\sqrt{2}\right)^2\times\sqrt{3}}{4}=\frac{72\times\sqrt{3}}{4}=\boxed{18\sqrt{3}}\ cm^2$$

تمرين2: ليكن العددين $A=\frac{4940}{1430}$ و $B=\frac{16}{11}$

1) اشرح لماذا الكسر B غير قابل للاختزال؟

2) أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين $4940,1430$ ثم اختزل الكسر A

3) أثبت أن عدد طبيعي $A-B$

الحل:1) الكسر $B=\frac{16}{11}$ غير قابل للاختزال لأن البسط والمقام عددان اوليان فيما بينهما حيث $GCD(16,11)=\boxed{1}$

المقسوم	المقسوم عليه	الباقي
4940	1430	650
1430	650	130
650	130	0
$GCD\left(4940,1430\right)=\boxed{130}$		

$$A=\frac{4940\div 130}{1430\div 130}-\frac{16}{11}$$
$$A-B=\frac{38}{11}-\frac{16}{11}=\boxed{2}$$

وهو عدد طبيعي

تمرين3: أوجد ناتج المقدار: $A=\sqrt{7+\sqrt{8-\sqrt{16}}}$

الحل: $A=\sqrt{7+\sqrt{8-4}}$

$$A=\sqrt{7+2}$$
$$A=\sqrt{9}$$
$$A=\boxed{3}$$

تمرين4: لتكن الأعداد: $F=2\sqrt{24}+\sqrt{216}-4\sqrt{54}$ ، $M=\frac{30}{\sqrt{15}}$ ، $N=\frac{\sqrt{108}}{2}-2\sqrt{3}$. والمطلوب:

1)اكتب العدد F بالشكل $a\sqrt{b}$

2)أزل الجذر من مقام الكسر M

3)اكتب العدد N بأبسط صيغة

الحل:1) $F=2\sqrt{24}+\sqrt{216}-4\sqrt{54}$

$$F=2\times 2\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\times 3\sqrt{6}$$
$$F=4\sqrt{6}+6\sqrt{6}-12\sqrt{6}=\boxed{-2\sqrt{6}}$$

(2

$$N=\frac{\sqrt{108}}{2}-2\sqrt{3}$$
$$N=\frac{6\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{3}$$
$$N=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\boxed{\sqrt{3}}$$

(3

$$M=\frac{30}{\sqrt{15}}=\frac{30\times\sqrt{15}}{\sqrt{15}\times\sqrt{15}}$$
$$M=\frac{30\times\sqrt{15}}{15}=\boxed{2\sqrt{15}}$$

تمرين5: اختزل كلاً من العبارتين :

$$A=3\sqrt{3}+\sqrt{75}$$
$$B=2\sqrt{3}-\sqrt{27}+\sqrt{48}$$

ثم احسب : $(A+B)$و $(A-B)$و $(A+B)(A-B)$

واكتب الناتج بأبسط صورة

الحل:1) $A=3\sqrt{3}+\sqrt{75}$

$$A=3\sqrt{3}+5\sqrt{3}=\boxed{8\sqrt{3}}$$
$$B=2\sqrt{3}-\sqrt{27}+\sqrt{48}$$
$$B=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+4\sqrt{3}=\boxed{3\sqrt{3}}$$

2). $A+B=8\sqrt{3}+3\sqrt{3}\Rightarrow A+B=\boxed{11\sqrt{3}}$

$$A-B=8\sqrt{3}-3\sqrt{3}\Rightarrow A-B=\boxed{5\sqrt{3}}$$
$$(A+B)(A-B)=\left(11\sqrt{3}\right)\times\left(5\sqrt{3}\right)$$
$$(A+B)(A-B)=55\times 3=\boxed{165}$$

تمرين6: احصر العدد $\sqrt{27}$ بين عددين صحيحين متتاليين

الحل: نبحث عن عدد أكبر مباشرة من 27 بحيث يكون جذره التربيعي عدد صحيح وكذلك عدد أصغر مباشرة منه يكون جذره التربيعي عدد صحيح : $\sqrt{25},\sqrt{27},\sqrt{36}$

$5,\sqrt{27},6$

1 قوة عدد عادي

a^n تقرأ: قوة العدد a بالأس n

تعريف: $a^n = \underbrace{1\times a\times a\times a\times a\times .....}_{n\text{ مرة}}$

نتائج التعريف	
$a^1 = a$ **مثال:** $8^1 = 8$	$a^0 = 1$ **مثال:** $\left(\frac{-2}{3}\right)^0 = 1$
$n \neq 0$ **بشرط** $0^n = 0$ **مثال:** $(0)^{65} = 0$	$1^n = 1$ **مثال:** $(1)^{654} = 1$
$(a)^{-n} = \frac{1}{a^n}$ **مثال** $(2)^{-7} = \frac{1}{(2)^7}$	

خواص القوى:

الأساس مشترك	الأس مشترك
$a^n \times a^m = a^{n+m}$ $5^3 \times 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$	$(a\times b)^n = a^n \times b^n$ $(2\times\sqrt{3})^2 = (2)^2 \times (\sqrt{3})^2 = 4\times 3 = 12$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\frac{3^4}{3^{-2}} = 3^{4-(-2)} = 3^6$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7^2}{2^2} = \frac{49}{4}$
$(a^n)^m = a^{n\times m}$ $(7^2)^4 = (7)^{2\times 4} = (7)^8$	

ملاحظة1: $10^n = 1\underbrace{00000.....000}_{n\text{ صفر}}$

ملاحظة2: $10^{-n} = \underbrace{0.000.....001}_{n\text{ صفر}}$

تمرين1: احسب ما يلي: $A = \frac{2^8\times 3^2\times 5^7}{2^3\times(15)^2}$

الحل: $A = \frac{2^8\times 3^2\times 5^7}{2^3\times(3\times 5)^2} = \frac{2^8\times \cancel{3^2}\times 5^7}{2^3\times \cancel{3^2}\times 5^2} = 2^{8-3}\times 5^{7-2}$

ومنه $A = 2^{8-3}\times 5^{7-2} = 2^5\times 5^5$

ومنه $A = (2\times 5)^5 = 10^5 = 100000$

تمرين2: بيّن أن B عدد صحيح: $B = \frac{-2\times 10^{-3}\times 25\times(10^2)^2}{50\times 10^5\times(-0.1)\times 10^{-3}}$

الحل: $B = \frac{-2\times 10^{-3}\times 25\times 10^4}{50\times 10^5\times(-10)^{-1}\times 10^{-3}}$

$B = \frac{-50\times 10}{-50\times 10} = \boxed{1}$ وهو عدد صحيح

تمرين3: ليكن المقدارين:

$A = \frac{16\times 10^{-2}\times 12}{(10^3)^2\times 48\times 10^{-8}}$ ، $B = \frac{7^8\times(25)^2\times 10^3}{2^2\times(35)^7}$

1) احسب المقدار A.

2) أثبت أن $B = 14$.

3) احسب $\frac{B}{A}$ واكتبه بالصيغة العشرية.

الحل:1) $A = \frac{16\times 10^{-2}\times 12}{(10^3)^2\times 48\times 10^{-8}}$

$A = \frac{\cancel{16}\times 10^{-2}\times \overset{4}{\cancel{12}}}{(10)^6\times \cancel{16}\times \underset{1}{\cancel{3}}\times 10^{-8}}$

$A = \frac{10^{-2}\times 4}{10^{-2}} = 4$

2). $B = \frac{7^8\times(25)^2\times 10^3}{2^2\times(35)^7}$

$B = \frac{7^8\times(5^2)^2\times(2\times 5)^3}{2^2\times(7\times 5)^7}$

$B = \frac{7^8\times 5^4\times 2^3\times 5^3}{2^2\times 7^7\times 5^7}$

$B = 7\times 2 = 14$

3). $\frac{B}{A} = \frac{14}{4}$ ومنه $\frac{B}{A} = \frac{7}{2} = 3.5$

العدد 3.5 عدد عشري يحوي فاصلة يمينها أرقام منتهية

وصيغته العشرية $3.5 = 35\times 10^{-1}$

تمرين4: ليكن المقدارين:

$M = 2\times 3^4 + 9^2$ ، $G = 4^{50}$ والمطلوب:

1) أكتب المقدار M على شكل قوة اساسها عدد طبيعي.

2) أوجد نصف العدد $G = 4^{50}$.

الحل: 1) $M = 2\times 3^4 + 9^2$

$M = 2\times 3^4 + 3^4$

$M = 3^4(2+1) = 3^4(3) = \boxed{3^5}$

2). نصف العدد $G = 4^{50}$ هو $G = \frac{1}{2}\times 4^{50}$

$= \frac{4^{50}}{2} = \frac{(2^2)^{50}}{2} = \frac{2^{100}}{2} = 2^{99}$

النشر

هو عملية تحويل الجداء إلى مجموع

1. قاعدة التوزيع: $k(a+b)=ka+kb$ *
$k(a-b)=ka-kb$ *

2. جداء ذي حدين بمثله: $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

مثال1: أنشر المقدار $A=-2x(3x+2)$

الحل:
$A=-2x\times 3x+(-2x)\times 2$
$A=-2\times 3\times x\times x-2\times 2\times x$
$A=-6x^2-4x$

مثال2: أنشر واختزل المقدار $C=(x+1)(x+2)$

الحل:
$C=x\times x+x\times 2+1\times x+1\times 2$
$C=x^2+2x+x+2$
$C=x^2+3x+2$ وبالجمع نجد

مثال3: أنشر المقدار $D=(2x-3)(4x-1)$

الحل:
$D=2x\times 4x+2x\times(-1)+(-3)\times 4x+(-3)\times(-1)$
$D=8x^2-2x-12x+3$
$D=8x^2-14x+3$ وبالجمع نجد

مثال4: أنشر واختزل $E=(2x-3)(x+2)-5(2x-3)$

الحل:
$E=2x^2+4x-3x-6-10x+15$
$E=2x^2-9x+9$ وبالجمع نجد

مطابقات شهيرة

أولا: مربع مجموع عددين = مربع الأول + ضعفي الأول في الثاني + مربع الثاني

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

تمرين: أوجد منشور كل مما يلي

$(x+5)^2=x^2+10x+25$

$(2x+3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$

ثانيا: مربع فرق عددين يساوي مربع الأول - ضعفي الأول في الثاني + مربع الثاني

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

تمرين: أوجد منشور كل مما يلي

$(2a-3)^2=4a^2-12a+9$

$(x-7)^2=x^2-14x+49$

ثالثا: جداء مجموع عددين في فرقهما = مربع الأول – مربع الثاني

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

تمرين: أوجد منشور ما يلي:

$(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})=a^2-3$

$(2x-3)(2x+3)=4x^2-9$

تمرين: أنشر ما يلي بالطريقة التي تراها مناسبة

(1 $A=(x+2)^2-(x+2)$

الحل:
$A=x^2+4x+4-x-2$
$A=x^2+3x+2$

(2 $B=(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}$

الحل:
$B=x^2+\frac{2}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

وبإزالة الجذر من المقام نجد: $B=x^2+\frac{2\sqrt{2}}{2}x+\frac{2}{2}$

$B=x^2+\sqrt{2}x+1$

(3 $C=(4x-1)^2-(x+2)^2$

الحل:
$C=16x^2-8x+1-(x^2+4x+4)$
$C=16x^2-8x+1-x^2-4x-4$
$C=15x^2-12x-3$

(4 $D=(5y+4)^2+(5y+4)(5y-4)$

الحل:
$D=25y^2+40y+16+(25y^2-16)$
$D=50y^2+40y$

(5 $E=(3x+1)^2-(3x-1)^2$

الحل:
$E=9x^2+6x+1-(9x^2-6x+1)$
$E=9x^2+6x+1-9x^2+6x-1$
$E=12x$

(6 $F=(-4x+1)(2x+3)+(3x+1)^2$

الحل:
$F=-8x^2-12x+2x+3+(9x^2+6x+1)$
$F=-8x^2-12x+2x+3+9x^2+6x+1$
$F=x^2-4x+4$

(7 $G=\left(3x+\frac{1}{2}\right)\left(3x-\frac{1}{2}\right)+\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$

الحل:
$G=9x^2-\frac{1}{4}+\left(9x^2-3x+\frac{1}{4}\right)$
$G=9x^2-\frac{1}{4}+9x^2-3x+\frac{1}{4}$
$G=18x^2-3x$

(8 $H=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$

الحل:
$H=x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$

التحليل هو عملية تحويل المجموع إلى جداء

أولاً: التحليل بإخراج عامل مشترك

نخرج العامل المشترك بالشكل الآتي

إشارة الأول

العدد GCD

متغير إن وجد مشترك وبأصغر أس

قوس إن وجد مشترك وبأصغر أس

ثم نقسم التركيب على العامل المشترك

بالشكل الآتي

إشارة / إشارة

عدد / عدد

متغير / متغير

قوس / قوس

مع ملاحظة ما يلي

الحد / الحد ذاته = 1

الحد / معاكسه = -1

قسمة القوى للأساس ذاته نطرح الأسس

مثال1: حلل الى جداء أكبر عدد ممكن من العوامل

(1 $A=-12x^3y\ z+16x^2y^2$

الحل: $A=-4x^2y\left(3xz-4y\right)$

(2 $B=8x^3\left(5y-1\right)-12x^2y\left(5y-1\right)$

الحل: $B=4x^2\left(5y-1\right)\left(2x-3y\right)$

ثانياً: باستخدام المتطابقات التربيعية

a. من الشكل $x^2\pm2xy+y^2$

نحلل بالشكل:(جذر الأول، إشارة الثاني، جذر الثالث)تربيع

ونتحقق بالشكل: 2×الأول × الثاني = الحد الأوسط

حلل $A=x^2+6x+9$

الحل: $A=\left(x+3\right)^2$

b. من الشكل: x^2-y^2 نحلل بالشكل

(جذر الأول + جذر الثاني)×(جذر الأول - جذر الثاني)

حلل $A=4x^2-9$ الحل: $A=\left(2x+3\right)\left(2x-3\right)$

بشكل عام: تكون صيغة السؤال حلل إلى جداء عوامل

أولاً: إذا كان عدد الحدود **2** نفكر بالشكل التالي

1- العامل المشترك(...±...)@

2- متطابقة (...+...) (...-...)

3- عامل مع متطابقة(...+...) (...-...)@

ثانياً: إذا كان عدد الحدود **3** نفكر في

1- العامل المشترك(...±...±...)@

2- متطابقة $(...\pm...)^2$

3- عامل مع متطابقة $(...\pm...)^2$ @

ثالثاً: إذا كان غير ذلك :((نحلل الجزء الذي يدل على مجموع جبري أولاً ثم نتابع كما ورد في أولا أو ثانيا)) .

حلل إلى جداء أكبر عدد ممكن من العوامل ما يلي:

(1 $A=-6x+4y$

الحل: $A=-2\left(3x-2y\right)$

(2 $B=12x^2-8x$

الحل: $B=4x\left(3x-2\right)$

(3 $B=-4x^2y+6xy$

الحل: $B=-2xy\left(2x-3\right)$

(4 $C=2y\left(3x-1\right)+6y^2\left(3x-1\right)$

الحل: $C=2y\left(3x-1\right)\left(1+3y\right)$

(5 $D=\left(3x-1\right)\left(x+2\right)-\left(x+2\right)$

الحل: $D=\left(x+2\right)\left[\left(3x-1\right)-1\right]$

$D=\left(x+2\right)\left(3x-2\right)$

(6 $E=\left(3x-1\right)\left(x+2\right)+x^2+4x+4$

الحل: $E=\left(3x-1\right)\left(x+2\right)+\left(x+2\right)^2$

$E=\left(x+2\right)\left[\left(3x-1\right)+\left(x+2\right)\right]$

$E=\left(x+2\right)\left(4x+1\right)$

(7 $F=\left(x-2\right)^2-4x+8$

الحل: $F=\left(x-2\right)^2-4\left(x-2\right)$

$F=\left(x-2\right)\left[\left(x-2\right)-4\right]$

$F=\left(x+2\right)\left(x-6\right)$

(8 $G=\left(x-3\right)^2-\left(x+4\right)^2$

الحل: $G=\left[\left(x-3\right)+\left(x+4\right)\right]\left[\left(x-3\right)-\left(x+4\right)\right]$

$G=\left(x-3+x+4\right)\left(x-3-x-4\right)=-7\left(2x+1\right)$

تمرين: ليكن التركيب $H=\left(3x+2\right)^2-\left(3x+2\right)\left(x-7\right)$

1. أنشر واختزل H ثم حلل المقدار H
2. أوجد قيمة H من أجل $x=2$

الحل:1. $H=9x^2+12x+4-\left(3x^2-21x+2x-14\right)$

$H=9x^2+12x+4-3x^2+21x-2x+14$

$H=6x^2+31x+18$

التحليل $H=\left(3x+2\right)\left[\left(3x+2\right)-\left(x-7\right)\right]$

$H=\left(3x+2\right)\left(3x+2-x+7\right)$

$H=\left(3x+2\right)\left(2x+9\right)$

2.نعوض في ناتج النشر $H=6x^2+31x+18$

$H=6(2)^2+31(2)+18$

$H=24+62+18=104$

المعادلات

تعريف المعادلة من الدرجة الأولى بالمجهول x هي كل معادلة تؤول إلى الشكل $ax+b=0$ (مع $a\neq 0$)

حلُّ معادلة هو إيجاد قيمة (أو قيم) المجهول التي تحقّق المعادلة أي تجعلها صحيحة.

تسمى كل قيمة للمجهول تحقّق المعادلة **حلاً** لها أو **جذراً** لها

نقول إنَّ معادلتين **متكافئتان** إذا كان لهما الحلول نفسها

للتحقق من **جذر(حل)** للمعادلة نعوض قيمة الجذر في المعادلة فإذا تحققت المساواة يكون حلا لها والعكس بالعكس

خطوات حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1)المعادلة يوجد بها كسور نضرب الطرفين بـ (م.م.ا)للمقامات
2)التبسيط : النشر وجمع الحدود المتشابهة في كل طرف
3)نقل المجاهيل لطرف والمعاليم لطرف مع تغيير إشارة المنقول
4)جمع الحدود المتشابهة في كل طرف إن وجدت
5)القسمة على أمثال المجهول(حر/مقيد) وتبسيط الناتج.

مثال1:حل المعادلات التالية:

1) $\frac{1}{2}x+2=\frac{3x-1}{3}$

الحل: نضرب الطرفين ب (م.م.أ) للمقامات وهو 6

$$3x+12=2(3x-1)$$
$$3x+12=6x-2$$
$$3x-6x=-2-12$$
$$-3x=-14$$
$$x=\frac{-14}{-3} \quad \text{ومنه} \quad \boxed{x=\frac{14}{3}}$$

2) $4x+\frac{5}{3}=2x-\frac{1}{3}$

الحل: نضرب الطرفين ب (م.م.أ) للمقامات وهو 3

$$12x+5=6x-1$$
$$12x-6x=-1-5$$
$$6x=-6$$
$$x=\frac{-6}{6} \quad \text{ومنه} \quad \boxed{x=-1}$$

3) $3(5+3x)-(x-3)=0$

الحل:
$$15+9x-x+3=0$$
$$8x+18=0$$
$$8x=-18$$
$$x=\frac{-18}{8} \quad \text{ومنه} \quad \boxed{x=\frac{-9}{4}}$$

4) $5x-1=7x+5$ وتحقق من صحة الحل

الحل:
$$5x-7x=5+1$$
$$-2x=6$$
$$\boxed{x=-3}$$

التحقق $5(-3)-1=7(-3)+5$

ومنه $-15-1=-21+5$

ومنه $-16=-16$ محققة فهو حل لها

المتراجحات

متراجحات الدرجة الأولى بمجهول واحد

تعريف المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد x تعبر عن مقارنة بين طرفين قد تكون صحيحة أو غير صحيحة، ذلك حسب قيم x.

كلُّ قيمة للمجهول x تجعل المقارنة بين الطرفين صحيحة تسمّى **حلاً المتراجحة**.

حلُّ متراجحة هي عملية إيجاد جميع قيم x التي تحققها (تجعل المقارنة صحيحة)

نقول إنَّ متراجحتين متكافئتان إذا كان لهما الحلول نفسها.

خواص المتراجحة

(1) إذا جمعنا نفس العدد إلى طرفي متراجحة أو طرحنا نفس العدد من طرفيها نحصل على متراجحة مكافئة للمتراجحة المعطاة.

(2) إذا ضربنا طرفي متراجحة بعدد موجب تماماً أو قسمنا طرفيها على عدد موجب تماماً نحصل على متراجحة مكافئة للمتراجحة المعطاة.

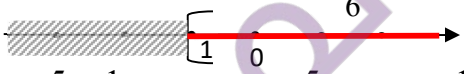
(3) إذا ضربنا طرفي متراجحة بعدد سالب تماماً أو قسمنا طرفيها على عدد سالب تماماً، يُعكس اتجاهها

حل المتراجحات التالية:

1) $4x+\frac{5}{3}\geq 2x-\frac{1}{3}$ وهل العدد(0) حل لها

الحل: نضرب الطرفين ب (م.م.أ) للمقامات وهو 3

$$12x+5\geq 6x-1$$
$$12x-6x\geq -1-5$$
$$6x\geq -6$$
$$x\geq \frac{-6}{6} \quad \text{ومنه} \quad x\geq -1$$



التحقق: $4(0)+\frac{5}{3}\geq 2(0)-\frac{1}{3}$ ومنه $\frac{5}{3}\geq\frac{1}{3}$ محققة

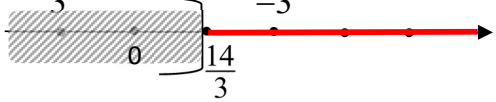
2) $5x-1>7x+5$ وهل 3 حل لها

الحل:
$$5x-7x>5+1$$
$$-2x>6$$
$$x<\frac{6}{-2} \quad \text{ومنه} \quad x<-3$$

التحقق: $5(3)-1>7(3)+5$ ومنه $14\geq 26$ غير محققة

3) $3x+12<2(3x-1)$

الحل:
$$3x+12<6x-2$$
$$3x-6x<-2-12$$
$$-3x<-14$$
$$x>\frac{-14}{-3} \quad \text{ومنه} \quad x>\frac{14}{3}$$



حل المسائل باستخدام المعادلات

نقرأ النص بإمعان
إن كان في النص مجهول واحد نفرض قيمته x
إن كان في النص مجهولين نفرض قيمة الصغير x
ثم نوجد الكبير بدلالة الصغير
نشكل معادلة أو بحسب مفردات المسألة
نحلها ونناقش الحلول

حل المسائل التالية

مسألة1: عمر سامر الان 11 سنة وعمر غيث الان 26سنة
بعد كم سنة يصبح عمر غيث يساوي مثلي عمر سامر

الحل: نفرض عدد السنوات x
بعد x سنة يكون عمر سامر $x+11$
بعد x سنة يكون عمر غيث $x+26$
عمر غيث بعد xسنة يساوي ضعفي عمر سامر بعد x سنة
إذا: $x+26=2(x+11)$
$$x+26=2x+22$$
$$26-22=2x-x$$
عدد السنوات $x=4$

مسألة2: ما العدد الذي إذا جمعنا ثلاثة أرباعه مع خمسيه حصلنا على 460

الحل: نفرض العدد x فيكون $\frac{3}{4}x+\frac{2}{5}x=460$
نضرب الطرفين ب(م.م.أ) للمقامات وهو 20
$$5\times 3x+4\times 2x=9200$$
$$15x+8x=9200$$
$$23x=9200$$
$$x=\frac{9200}{23} \quad \text{ومنه} \quad x=\boxed{400}$$

مسألة 3: تضم مكتبة رولا اربعة أصناف من الكتب نصفها مدرسية وربعها روايات وخمسها علمية بالإضافة إلى معجمين. ما عدد كتب رولا؟.

الحل: نفرض عدد كتب رولا x فيكون
$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x+2=x$$
نضرب الطرفين بالعدد 20 وهو (م.م.أ) للمقامات
$$10x+5x+4x+40=20x$$
$$19x+40=20x$$
$$40=20x-19x$$
$$x=40$$

حل المسائل باستخدام المتراجحات

نقرأ النص بإمعان
إن كان في النص مجهول واحد نفرض قيمته x
نشكل متراجحة بحسب مفردات المسألة
نحلها ونناقش الحلول

شراء محابر من المكتبة يكلف 1790 ليرة لكل محبرة.
وشراؤها عن طريق موقع إنترنيت يكلف 1650 ليرة لكل محبرة.
مع إضافة أجرة النقل وهي 490 ليرة أياً كان عدد المحابر المشتراة
بدءاً من أي عدد من المحابر يكون الشراء عن طريق موقع إنترنيت أوفر من الشراء من المكتبة؟

الحل: **نفرض عدد المحابر** x
$$1790x>1650x+490$$
$$1790x-1650x>490$$
$$140x>490$$
$$x>\frac{490}{140}$$
$$x>3.5$$
إذا عدد المحابر عن طريق الانترنت أوفر بدءاً من 4 محابر.

هناك عرضان في محل تأجير أفلام الفيديو

- **اشتراك واستعارة:** يدفع المشترك 6000 ليرة سنوياً، ويدفع 550 ليرة عن كل فلم يستعيره.
- **استئجار:** يدفع المستأجر 800 ليرة عن كل فلم يستأجره.

بدءاً من كم فلماً يشاهده الشخص سنوياً يكون العرض الأول أوفر له

الحل: نفرض عدد الأفلام x
في العرض الاول الكلفة $550x+6000$
في العرض الثاني الكلفة $800x$
ومنه $550x+6000<800x$
ومنه $550x-800x<-6000$
ومنه $-250x<-6000$
ومنه $x>\frac{-6000}{-250}$
ومنه $x>24$
إذاً بدءاً من 25 قلم يصبح العرض الأول أوفر

في احد المسابح تم اعلان العرض التالي
1) دفع نقدي: يدفع الشخص مبلغ 340 ليرة عن كل زيارة للمسبح
2) اشتراك : يشترك الشخص ببطاقة سنوية تصلح لعشر زيارات للمسبح سعرها 1700 ليرة
بدءاً من كم زيارة للمسبح يكون العرض اشتراك أوفر

الحل: نفرض عدد الزيارات للمسبح x
فتكون تكلفة الدخول بدون اشتراك $340x$
$$340x>1700$$
ومنه $x>\frac{1700}{340}$
ومنه $x>5$
اذاً بدءاً من 6 زيارات يصبح العرض الثاني أوفر

معادلات – خاصة الجداء الصفري

1. إذا كان أحدُ مضاريبِ جداءٍ معدوماً، كان الجداء معدوماً. بمعنى:
إذا كان $a=0$ أو $b=0$، كان $a\times b=0$
2. إذا كان جداء عدة مضاريب معدوماً، كان واحد على الأقل معدوماً
إذا كان $a\times b=0$، كان $a=0$ أو $b=0$
3. يرمز a و b و c و d إلى أعداد حقيقية
حلول المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0$ هي قيم x
التي تحقق: $ax+b=0$ أو $cx+d=0$

حل المعادلات الأتية :

1) $(2-x)(1+x)=0$

الحل: إما $(2-x)=0$ ومنه $x=2$
أو $(1+x)=0$ ومنه $x=-1$

2) $-3x(3x+2)(2x-5)=0$

الحل: إما $-3x=0$ ومنه $x=0$
أو $(3x+2)=0$ ومنه $x=\frac{-2}{3}$
أو $(2x-5)=0$ ومنه $x=\frac{5}{2}$

حل المعادلة $x^2=a$

- في حالة عدد موجب تماماً a، يكون $+\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ هما جذرا المعادلة $x^2=a$
- في حالة $a=0$: للمعادلة $x^2=0$ حل وحيد هو $x=0$.
- في حالة $a<0$، لا توجد قيم للمجهول x تجعل $x^2=a$ نقول إنَّ المعادلة $x^2=a$، في هذه الحالة (مستحيلة الحل)

حل المعادلات الأتية :

1) $x^2+5=54$
ومنه $x^2=49$
إما $x=+\sqrt{49}$ ومنه $x=+7$
إما $x=-\sqrt{49}$ ومنه $x=-7$

2) $x^2+16=9$
ومنه $x^2=9-16$
ومنه $x^2=-7$ مستحيلة الحل

3) $x^2+1=1$
ومنه $x^2=1-1$
ومنه $x^2=0$ ومنه $x=0$

4) $(x+3)^2=25$
إما $x+3=+5$ ومنه $x=5-3=2$
إما $x+3=-5$ ومنه $x=-5-3=-8$

5) $x^2+6x+9=0$
$(x+3)^2=0$
ومنه $x+3=0$
ومنه $x=-3$

تمرين1: ليكن المقدارين

$E=(3x+2)^2-(3x+2)(x+7)$

$F=6x^2-11x-10$

1) انشر واختزل E واستنتج أن $E=F$
2) حلل E
3) احسب E من أجل $x=2$
4) حل المعادلة $E=0$

الحل:1) $E=(3x+2)^2-(3x+2)(x+7)$

$E=9x^2+12x+4-(3x^2+21x+2x+14)$

$E=9x^2+12x+4-3x^2-21x-2x-14$

$E=6x^2-11x-10$ بالموازنة نجد $E=F$

2). $E=(3x+2)^2-(3x+2)(x+7)$

$E=(3x+2)\left[(3x+2)-(x+7)\right]$

$E=(3x+2)(2x-5)$

3). نعوض في الاساسي او ناتج النشر او التحليل

$E=(3\times2+2)^2-(3\times2+2)(2+7)$

$E=(8)^2-(8)(9)$ ومنه

$E=64-72=-8$ ومنه

4). $E=0$

ومنه $(3x+2)(2x-5)=0$

إما $(3x+2)=0$ ومنه $x=\frac{-2}{3}$

أو $(2x-5)=0$ ومنه $x=\frac{5}{2}$

تمرين2: ليكن المقدار $A=(x-2)^2-9(x-2)$

1) انشر العبارة A واختزلها.
2) حلل A إلى جداء عاملين، ثم حل المعادلة $A=0$
3) احسب قيمة A عندما $x=3$.

الحل: 1) $A=x^2-4x+4-9x+18$

$\boxed{A=x^2-13x+22}$

2) $A=(x-2)\left[(x-2)-9\right]$

$A=\boxed{(x-2)(x-11)}$

1) $(x-2)(x-11)=0$

إما $x-11=0$ ومنه $x=\boxed{11}$

أو $x-2=0$ ومنه $x=\boxed{2}$

4) $A=(3-2)^2-9(3-2)$

ومنه $A=(1)^2-9(1)$

ومنه $A=1-9=-8$

تمرين3: لتكن المتراجحة $3x+7\geq 13$ والمطلوب

1) تحقق أي العددين $\frac{7}{3}$, 1 حلا للمتراجحة وايهما ليس حلا لها ؟

2) حل المتراجحة $3x+7\geq 13$

3) مثل حلولها على مستقيم الاعداد

الحل: 1) * $3x+7\geq 13$

$$3\left(\frac{7}{3}\right)+7\geq 13$$

$$7+7\geq 13$$

$7+7\geq 13$ محققة فهو حلا للمتراجحة

* $3x+7\geq 13$

$$3(1)+7\geq 13$$

$$3+7\geq 13$$

$10\geq 13$ غير محققة ليس حلا للمتراجحة

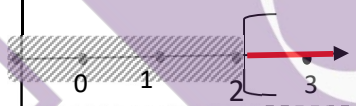
2) $3x+7\geq 13$

ومنه $3x\geq 13-7$

ومنه $3x\geq 6$

ومنه $x\geq \frac{6}{3}$

ومنه $x\geq 2$



تمرين4 : فيما يلي

2) حلل العبارة $E=(3x+1)^2-1$ الى جداء عاملين من الدرجة الأولى

3) حل المعادلة $E=0$ ثم احسب قيمة E عندما $x=\frac{1}{3}$

الحل: 1) $E=(3x+1)^2-1$

$$E=\left[(3x+1)-1\right]\left[(3x+1)+1\right]$$

$$E=(3x)(3x+2)$$

2) $E=0$

ومنه $(3x)(3x+2)=0$

إما $3x=0$

ومنه $x=0$

أو $3x+2=0$

$3x=-2$

$$x=\boxed{\frac{-2}{3}}$$

حساب قيمة E عندما $x=\frac{1}{3}$ نعوض في التركيب

$$E=\left[3\left(\frac{1}{3}\right)+1\right]^2-1$$

ومنه $E=[1+1]^2-1$

ومنه $E=4-1=\boxed{3}$

المسألة1: إذا علمتَ أن عُمْر خليل الأن $x+2$ سنة وعُمْر أخته شام ينقص عن عُمْر خليل 4 سنوات

1) اكتب بالرموز العبارة التي تعبّر عن عُمْر شام بدلالة x.

2) إذا علمتَ أنّ العدد الدال على جداء عُمْريهما 60 اكتب المعادلة التي تعبّر عن جداء عُمْريهما.

3) احسب عُمْر كل من خليل و شام.

الحل: 1) عمر شام = عمر خليل مطروحا منه 4

$$x+2-4=\boxed{x-2}$$

2) المعادلة $(x+2)(x-2)=60$

3) $x^2-4=60$

$x^2=60+4$

ومنه $x^2=64$

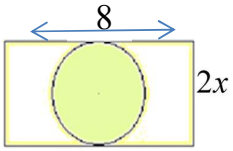
إما $x=-8$ **مرفوض** لأنه سالب

أو $x=8$ **مقبول**

عمر خليل $8+2=\boxed{10}$

وعمر اخته شام $8-2=\boxed{6}$

المسألة2:



في الشكل المجاور مستطيل طوله 8 وعرضه $2x$ و $x>0$

ودائرة تمس ضلعين متقابلين فيه

أوجد قيمة x التي تجعل مساحة الدائرة تساوي مساحة المنطقة المحصورة بين المستطيل والدائرة

الحل: مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$S_1=8\times 2x=\boxed{16x}$$

مساحة المستطيل $S_2=\pi R^2=\boxed{\pi x^2}$

مساحة المنطقة بين المستطيل والدائرة هي فرق المساحتين

$$S=S_1-S_2=\boxed{16x-\pi x^2}$$

$$\pi x^2=16x-\pi x^2$$

$$\pi x^2+\pi x^2-16x=0$$

$$2\pi x^2-16x=0$$

$$2x(\pi x-8)=0$$

إما $2x=0$

ومنه $x=\boxed{0}$ مرفوض

أو $\pi x-8=0$

ومنه $\pi x=8$

ومنه $x=\boxed{\frac{8}{\pi}}$ مقبول

المعـــــادلات الخطيـــــة بمجهـــــولين

المعادلة الخطية بمجهولين: هي معادلة من الشكل $ax+by=c$ حيث a,b,c أعداد معلومة و a,b لا يساويان الصفر معا.

إيجاد حلول لمعادلة خطية

نعطي قيمة اختيارية لأحد المجهولين فتؤول المعادلة الى معادلة ذات مجهول واحد نحلها ونوجد قيمة الآخر.

أوجد ثلاثة حلول للمعادلة الخطية التالية

$$2x+3y-6=0$$

الحل:

$$(1)\quad \boxed{2x+3y=6}$$

نفرض $\boxed{x=0}$ ونعوض في (1)

$$2(0)+3y=6$$
$$3y=6$$
$$y=\frac{6}{3} \quad \text{ومنه} \quad y=\boxed{2}$$

حل أول $\{x=0\,،\,y=2\}$

نفرض $\boxed{y=0}$ ونعوض في (1)

$$2x+3(0)=6$$
$$2x=6$$
$$x=\frac{6}{2} \quad \text{ومنه} \quad x=\boxed{3}$$

حل ثاني $\{x=3\,،\,y=0\}$

نفرض $\boxed{y=-4}$ ونعوض في (1)

$$2x+3(-4)=6$$
$$2x-12=6$$
$$2x=6+12$$
$$2x=18$$
$$x=\frac{18}{2} \quad \text{ومنه} \quad x=\boxed{9}$$

حل ثالث $\{x=9\,،\,y=-4\}$

التحقق من حلول معادلة خطية

للتحقق من حلول معادلة خطية
نعوض قيمة x وقيمة y في المعادلة الخطية
إن تحققت المساواة يكون حل لها والعكس بالعكس

مثال: هل $(x=9\,،\,y=-4)$ حل للمعادلة الخطية $2x+3y-6=0$

الحل: $2(9)+3(-4)-6=0$

$$18-12-6=0$$
$$18-18=0$$
$$0=0$$

المساواة محققة فهو حل للمعادلة

حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين $x\ ,\ y$

الطريقة الأولى: حل جملة معادلتين بالحذف بالتعويض

1. نكتب أحد المجهولين من إحدى المعادلتين بدلالة الآخر ونسميها (3).
2. نعوض قيمة هذا المجهول في المعادلة الأخرى فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.
3. نحل المعادلة ذات المجهول الواحد الناتجة فينتج عنه أحد المجهولين.
4. نعوض قيمة هذا المجهول في المعادلة (3) فنحصل على قيمة المجهول الآخر.

ملاحظة:

للتحقق من الحل :نعوض قيمة x وقيمة y في المعادلتين فإن تحققت المساواة في كلتا المعادلتين فالثنائية هي الحل المشترك والعكس بالعكس

مثال: حل الجملة: $\begin{cases} x+2y=8 & (1) \\ 3x-y=3 & (2) \end{cases}$

الحل: من المعادلة (1) نوجد تابع حل x بدلالة y كما يلي

$$\boxed{x=8-2y} \quad (3)$$

نعوض في المعادلة (2)

$$3(8-2y)-y=3$$
$$24-6y-y=3$$
$$-6y-y=3-24$$
$$-7y=-21$$
$$y=\boxed{3} \quad \text{ومنه}$$

نعوض في (3)

$$x=8-2(3)$$
$$x=8-6=\boxed{2}$$

الحل المشترك هو الثنائية $(2,3)$

للتحقق من صحة الحل:

نعوض $(3,2)$ في المعادلتين

$$x+2y=2+2(3)$$
$$x+2y=2+6=8$$

$$3x-y=3(2)-3$$
$$3x-y=6-3=3$$

الطريقة الثانية: حل جملة معادلتين بالحذف بالجمع

1. نضع المجاهيل في طرف والمعاليم في طرف
2. نرتب المعادلتين بحيث كل حدين متشابهين تحت بعضهما
3. **نجعل أمثال أحد المجهولين في المعادلتين عددان متعاكسان**
4. نجمع المعادلتين طرفاً لطرف يتم حذف أحد المجهولين
5. نحل المعادلة ذات المجهول نجد قيمة أحد المجهولين
6. نعوض قيمة هذا المجهول في أحدى المعادلتين نجد الاخر

مثال: حل الجملة: $\begin{cases} x+2y=8 & (1) \\ 3x-y=3 & (2) \end{cases}$

الحل: نضرب طرفي المعادلة ① بالعدد **(-3)**

$$-3x-6y=-24$$
$$3x-y=3$$

وبالجمع نجد +

$$-7y=-21$$

$$y=\frac{-21}{-7} \quad \text{ومنه} \quad y=\boxed{3}$$

نعوض قيمة y في ① $x+2(3)=8$

$$x+6=8 \quad \text{ومنه}$$
$$x=\boxed{2} \quad \text{ومنه}$$

الحل المشترك للجملة هو الثنائية $(2,3)$

استخدام حل جملة معادلتين خطيتين في حل المسائل

1- نفرض أحد المجهولين x والآخر y

2- نشكل جملة معادلتين

3- نحل الجملة

4- نوجد المطلوب في المسألة.

مثال1:اشترت سارة ستة دفاتر وخمسة أقلام بمبلغ 570 واشترى شقيقها سامر ثلاثة دفاتر وسبعة أقلام بمبلغ 555 ما سعر الدفتر ؟ وما سعر القلم؟

الحل: نفرض سعر الدفتر x ونفرض سعر القلم y

نشكل جملة : $\begin{cases} 6x+5y=570 & (1) \\ 3x+7y=555 & (2) \end{cases}$

نضرب طرفي المعادلة (2) بالعدد -2

$$\begin{cases} 6x+5y=570 & (1) \\ -6x-14y=-1110 & (2) \end{cases}$$

وبالجمع نجد $-9y=-540$

ومنه $y=60$

نعوض في المعادلة (1):

$$6x+5(60)=570$$
$$6x+300=570$$
$$6x=570-300$$
$$6x=270$$
$$x=45$$

فيكون سعر الدفتر الواحد $x=45$

وسعر القلم الواحد $y=60$

مثال2:مجموع ما يقتني الصديقان ماهر وعامر 144 طابع إذا أعطى ماهر طابعين مما لديه لصديقه عامر يصبح ما لدى عامر ضعفي ما لدى ماهر. ما عدد طوابع كل منهما

الحل: نفرض عدد طوابع ماهر x وعدد طوابع عامر y

$$\begin{cases} x+y=144 & (1) \\ 2(x-2)=y+2 & (2) \end{cases}$$

بإصلاح المعادلة (2) نجد $2x-4=y+2$

ومنه $2x-y=6$ (3)

نجمع المعادلتين (1) و(3) طرفا إلى طرف نجد

$$x+y=144$$
$$\frac{2x-y=6}{3x=150}+$$
$$x=\frac{150}{3}$$

ومنه $x=50$

نعوض في (1) نجد $50+y=144$

ومنه $y=144-50$ ومنه $y=94$

عدد طوابع ماهر50 وعدد طوابع عامر 94

معادلة مستقيم

المستقيم الذي لا يمر من مبدأ الإحداثيات معادلته

$$ax+by=c \quad \text{و} \quad c\neq 0$$

أولاً: معرفة (انتماء) وقوع نقطة على المستقيم

سير العمل: نعوض إحداثيات النقطة في معادلة المستقيم
إن تحققت المساواة فهي تقع على المستقيم
والعكس بالعكس

تمرين: هل النقطة A(-3 , 2) تقع على المستقيم d الممثل بالمعادلة الخطية $3y=6x-4$

الحل:
$$3(2)=6(-3)-4$$
$$6=-18-4$$
$$6=-22$$

المساواة ليست صحيحة

فالنقطة A لا تقع على المستقيم الممثل بالمعادلة

ثانيا: معرفة رسم المستقيم الذي لا يمر من المبدأ

سير العمل: لكي نرسم المستقيم نوجد نقطتين ونحددهما على المَعلمْ ونصل بينهما بمستقيم نجد المطلوب

تمرين: ارسم المستقيم L الممثل بالمعادلة الخطية التالية

$$4x-3y-12=0$$

الحل: نجعل المجاهيل في طرف والمعاليم في طرف

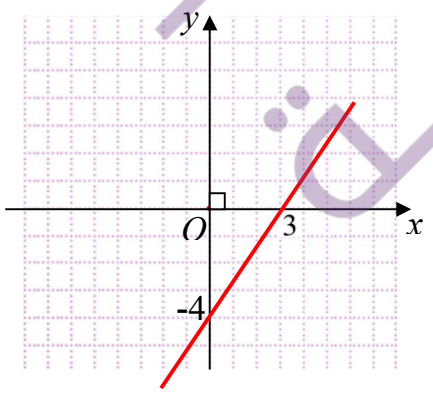
نفرض $x=0$ فتكون y هي ناتج قسمة الحر على المقيد

نفرض $y=0$ فتكون x هي ناتج قسمة الحر على المقيد

$$4x-3y=12$$

x	0	3
y	-4	0

نرسم المَعلمْ ونعيّن النقطتين ونرسم مستقيم يصل بين النقطتين فيكون هو المستقيم المطلوب.



المستقيم الذي يمر من مبدأ الإحداثيات

معادلته $ax+by=0$ والشكل العام $y=mx$

معرفة رسم المستقيم الذي يمر من المبدأ

سير العمل: لكي نرسم المستقيم نوجد نقطتين ونحددهما على المَعلمْ ونصل بينهما بمستقيم نجد المطلوب

تمرين: ارسم المستقيم L الممثل بالمعادلة الخطية التالية

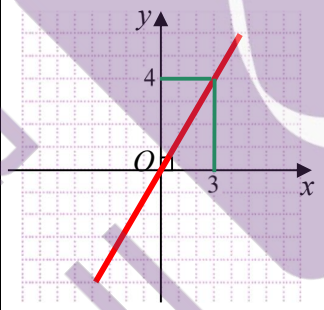
$4x-3y=0$

الحل: نجعل المعادلة بالشكل $ax=by$ ثم بالجدول نعطي لـ x قيمة أمثال y ونعطي لـ y قيمة أمثال x

$3y=4x$

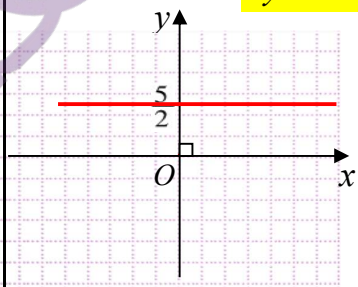
x	0	3
y	0	4

نرسم المَعلمْ ونعيّن النقطتين ونرسم مستقيم يصل بينهما فيكون هو المستقيم المطلوب



المستقيم الذي يوازي محور الفواصل معادلته $y=p$

تمرين : ارسم المستقيم $2y-5=0$



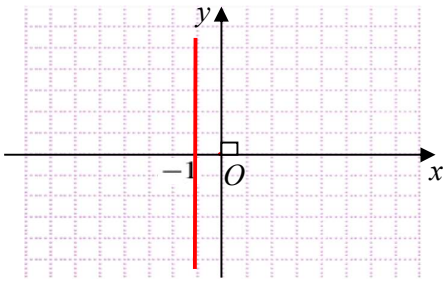
الحل:

$2y=5$

$y=\frac{5}{2}$

المستقيم الذي يوازي محور التراتيب معادلته $x=c$

تمرين : ارسم المستقيم $2x+2=0$



الحل:

$2x=-2$

$x=\frac{-2}{2}$

$x=-1$

حل جملة معادلتين خطيتين بيانياً

1. نرسم المستقيم الممثل للمعادلة الأولى
2. نرسم المستقيم الممثل للمعادلة الثانية
3. إذا تقاطع المستقيمين في نقطة ما $M(x,y)$ فهي الحل المشترك لجملة المعادلتين

وإذا لم يتقاطع المستقيمين بنقطة فهما متوازيين

وإذا اشترك المستقيمان بجميع النقط فهما منطبقين

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين التاليتين بيانياً:

$$\begin{cases} x+2y-6=0.....(1) \\ 2x-y-2=0.....(2) \end{cases}$$

الحل:

المعادلة (1) $x+2y-6=0$

وهي معادلة مستقيم لا يمر من المبدأ

$x+2y=6$

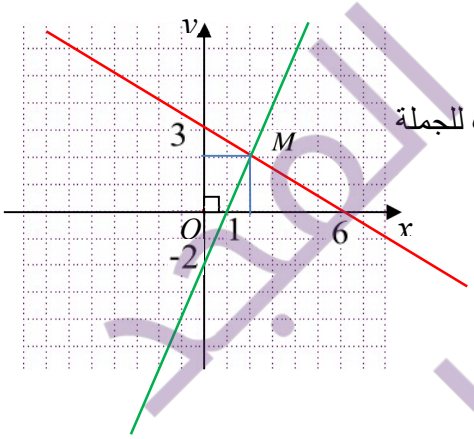
X	0	6
Y	3	0

المعادلة (2) $2x-y-2=0$

وهي معادلة مستقيم لا يمر من المبدأ

$2x-y=2$

X	0	1
Y	-2	0



الحل المشترك للجملة هو $M(2,2)$

ملاحظات:

1) اذا قطع المستقيم محور الفواصل فهو يقطعه في نقطة ترتيبها صفر وفاصلتها عدد لا يساوي الصفر
2) اذا قطع المستقيم محور التراتيب فهو يقطعه في نقطة فاصلتها صفر وترتيبها عدد لا يساوي الصفر

مسألة1: ليكن $(\Delta),(d)$ مستقيمان معادلتيهما

$$\begin{matrix} d: y=2x+2 \\ \Delta: y=x \end{matrix}$$ والمطلوب:

1) تحقق أيّ النقطتين $(2,2)$ و $(-1,0)$ تنتمي إلى المستقيم (d), و أيّها لا تنتمي.
2) حل جملة المعادلتين جبرياً.
3) إذا كانت A نقطة تقاطع المستقيم (d) مع محور الفواصل و B نقطة تقاطع المستقيم (d)مع محورالترتيب جِدْ إحداثيات B و A.
4) في معلم متجانس ارسم $(\Delta),(d)$,
ثمّ استنتج إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين.
5) احسب مساحة المثلث OAB.

الحل:

1). $d: y=2x+2$

$d: y=2x+2$	$d: y=2x+2$
$0=2(-1)+2$	$2=2(2)+2$
$0=-2+2$	$2=4+2$
$0=0$	$2=6$
المساواة محققة	المساواة غير محققة
فالنقطة تنتمي لـ d	فالنقطة لا تنتمي لـ d

2). الحل جبريا:

$$\begin{cases} d: y=2x+2 & (1) \\ \Delta: y=x & (2) \end{cases}$$

من(2) نعوض في (1):

$$\begin{aligned} x &= 2x+2 \\ -2 &= 2x-x \\ x &= \boxed{-2} \end{aligned}$$

نعوض في (2) $\quad y=\boxed{-2}$

الحل المشترك جبريا: $(x=-2, y=-2)$

3) $d: y=2x+2$

$A(-1,0)$ ومنه $x=\boxed{-1}$ ومنه $y=0$

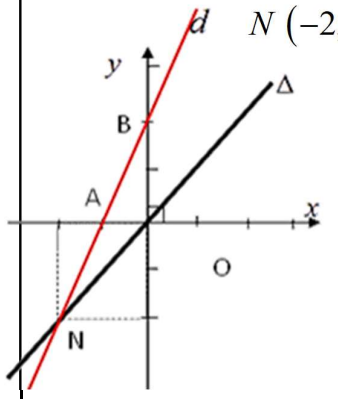
$B(0,2)$ ومنه $y=\boxed{2}$ ومنه $x=0$

4) $\boxed{d: y=2x+2}$ $\quad$ $\boxed{\Delta: y=x}$

x	0	-1
y	2	0

x	0	2
y	0	2

الحل المشترك بيانيا $N(-2,-2)$



5) $S_{OAB}=\dfrac{OA\times OB}{2}$

$S_{OAB}=\dfrac{1\times 2}{2}=\boxed{1}$

مسألة2: لتكن المعادلتين: $\begin{matrix} \Delta: y=-x+4 \\ d: y=x \end{matrix}$ **والمطلوب:**

1) حل جملة المعادلتين جبرياً
2) أوجد احداثيات النقطة B نقطة تقاطع Δ مع محور الفواصل
3) في معلم متجانس ارسم المستقيم (Δ) والمستقيم (d)
واكتب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيمين d و Δ.
4) احسب $\tan N\hat{O}B$ و استنتج قياس $N\hat{O}B$
5) أثبت أن المستقيمان Δ و d متعامدان

الحل: **1)** الحل جبريا:

$$\begin{cases} y=-x+4 & (1) \\ y=x & (2) \end{cases}$$

من(2) نعوض في (1):

$$\begin{aligned} x &= -x+4 \\ x+x &= 4 \\ 2x &= 4 \\ x &= \boxed{2} \end{aligned}$$

نعوض في (2) $\quad y=\boxed{2}$

الحل المشترك جبريا: $(x=2, y=2)$

(2 $\Delta: y=-x+4$

$y=0$ ومنه $\boxed{x=4}$ ومنه $B(4,0)$

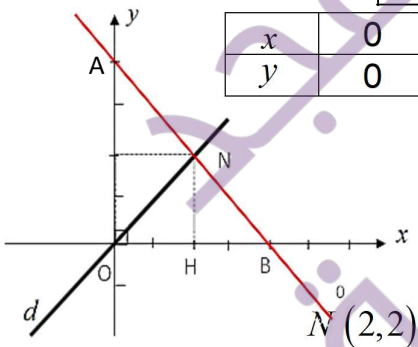
(3

$\boxed{\Delta: y=-x+4}$

x	0	4
y	4	0

$\boxed{y=x}$

x	0	2
y	0	2



الحل المشترك بيانيا $N(2,2)$

(4 $\tan(N\hat{O}B)=\dfrac{NH}{OH}=\dfrac{2}{2}=1$

ومنه $N\hat{O}B=45^\circ$

(5 المثلث ONB فيه NH متوسط وطول NH يساوي نصف الضلع OB فالمثلث ONB قائم ووتره OB ومنه $O\hat{N}B=90^\circ$ فإن $d\perp\Delta$

1 مفهوم التابع

تعريف التابع f هو إجرائيّة تربط بكل قيمة للمتحول x عددا واحدا $f(x)$.

يُسمّى $f(x)$ صورة x وفق التابع f

أحياناً، يُرمز إلى التابع f بالرمز $x \mapsto f(x)$

مثال1:التابع $f(x)=x^2$

بمعنى (كل عنصر يرتبط بمربعه)

تذكر: لا يوجد سوى مربع وحيد لكل عدد

مثال : $f(3)=3^2=9$

فيكون 9 صورة العدد 3

مثال : $f(4)=4^2=16$

فيكون 16 صورة العدد 4

تحقق من فهمك

① في العمود الأيسر من الجدول المرافق معلومات عن تابع f . انسخ ثم أكمل هذا الجدول.

الحل:

صيغة لفظيّة	صيغة رمزيّة
3 هو صورة 2	$f(\cdots)=\cdots$
8 هو صورة -1	$f(\cdots)=\cdots$
5 هو صورة 4	$f(\cdots)=\cdots$
-7 هو صورة 13	$f(\cdots)=\cdots$

صيغة رمزيّة
$f(2)=3$
$f(8)=-1$
$f(5)=4$
$f(-7)=13$

② هذه معلومات عن تابع h : $h(-1)=3$ و $h(1)=h(5)=0$

1. عبّر عن المعلومة $h(-1)=3$ بجملةٍ تتصدرها كلمة «**صورة**»
2. عبّر عن المعلومة $h(1)=h(5)=0$ بجملةٍ تحوي كلمة «**صورة**»

الحل:

-1 صورة العدد (-1) هو العدد(3)

-2 العدد (0) صورة العددين (1)،(5)

تدرب

③ الشكل المرافق هو جدول قيم تابع f

انسخ هذا الجدول في دفترك ثم أكمل:

① وفق التابع f العدد ..... هو صورة العدد 1.

② وفق التابع f العدد 5 هو صورة لكل من العددين 0 و .....

③ وفق التابع f العدد 10 هو ..... العدد .....

الحل:

(1) -2

(2) 4 و0

(3) صورة ، 3

x	$f(x)$
0	5
1	-2
2	-5
3	10
4	5

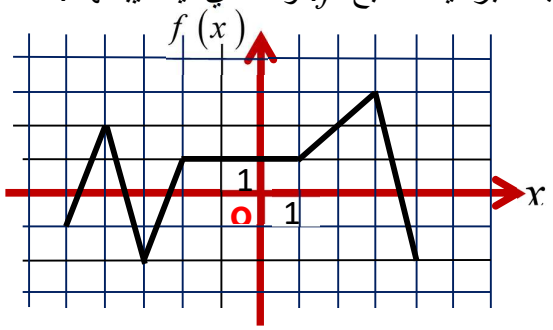
2 طرائق تعريف التابع

يوجد ثلاثة طرائق لتعيين التابع

1- التعيين بخط بياني

تأمل الخط البياني للتابع f الممثل جانباً.**المطلوب**:

1) عين مجموعة تعريف التابع f.
2) أوجد صور الأعداد: $4, 2, 0, -3, -4$.
3) أوجد أسلاف العدد -2.
4) هل للعدد -3 أسلاف ، حددها إن وجدت.
5) ماهي أصغر قيمة للتابع f ،
6) أوجد أكبر قيمة للتابع f. وعند أي قيمة يبلغها؟



الحل:

1) **لتعيين مجموعة التعريف**: نرسم من طرفي الخط البياني عمودين على محور الفواصل يقطعانه في النقطتين اللتين فاصلتاهما 4 و-5

فتكون مجموعة التعريف للتابع f هي المجال $[-5\ ,\ 4]$

2) **لإيجاد صورة عدد**: مثل (4) نقيم عمود من النقطة التي فاصلتها 4 على محور الفواصل فيقطع الخط البياني بنقطة نسقط منها عمود على محور التراتيب يقطعه بنقطة ترتيبيها(-2) تكون هي صورة العدد 4 .أي $f(4)=-2$

وبنفس الطريقة نجد صور الأعداد $2, 0, -3, -4$.

$$f(0)=1\ ,\ f(2)=2$$

$$f(-4)=2\ ,\ f(-3)=-2$$

3) **لإيجاد أسلاف عدد**: مثل (-2): من النقطة التي ترتيبها (-2) نقيم عمود على محور التراتيب فيقطع الخط البياني بنقطة أو أكثر نسقط منها العمود أو الأعمدة على محور الفواصل يقطعه بنقطة أو أكثر من نقطة ومنه (-3) و(4) تكونا هما سلفي العدد (-2)

4) **ما اسلاف العدد (-3)**: لاحظ ان المستقيم المار من النقطة التي ترتيبها (-3) لا يقطع الخط البياني للتابع بأية نقطة فليس للعدد(-3) اسلاف

5) **لتحديد أصغر قيمة للتابع:** نرسم من أخفض نقطة للخط البياني مستقيم عمود على محور التراتيب يقطع محور التراتيب بنقطة هي (-2)

6) **لتحديد أكبر قيمة للتابع:** نرسم من أعلى نقطة للخط البياني مستقيم عمود على محور التراتيب يقطع محور التراتيب بنقطة هي (3) يبلغها لما $x=3$

2- التعيين بجدول

التمرين الخامس: الجدول التالي يمثل قيّم التابع h الذي يقرن بكل شهر عدد شهادات التقدير الموزعة على الطلاب المتفوقين في إحدى شعب الصف التاسع في مدرستنا.(يبدأ الدوام في الشهر التاسع وينتهي في نهاية الشهر الخامس)

الشهر	9	10	11	12	1	2	3	4	5
العدد	4	2	6	5	9	3	6	2	9

صورة ← أكبر قيمة و أصغر قيمة

المطلوب:

1) ماذا تعني الكتابة $h(10)=2$.
2) أوجد صورة العدد 5.
3) ما أسلاف العدد4.
4) هل للعدد 10 أسلاف ؟علل.
5) في أي شهر تم توزيع أكبرعدد من شهادات التقدير.

الحل:

1) الكتابة $h(10)=2$ تعني في الشهر10 تم توزيع شهادتان فقط على الطلاب
2) صورة العدد 5 تكون في الجدول تحت العدد 5 وهي 9
3) أسلاف العدد 4 تقع في الجدول فوق العدد 4 وهي 9
4) العدد 10 ليس له أسلاف لعدم وجود العدد 10 في حقل عدد الشهادات الموزعة
5) تم توزيع أكبر عدد من الشهادات في الشهر 1 والشهر 5 لأن العددين 1 و 5 لهما أكبر صورة وهي 9

3- التعيين بإعطاء الصيغة

h هو التابع المعطى بالصيغة $h: x \mapsto 3(x-1)^2$

لحساب صورة مثلاً: احسب $f(0)$ و $f(5)$

$$f(0)=3(0-1)^2=3\times 1=3$$
$$f(5)=3(5-1)^2=3\times 16=48$$

مثال k هو التابع المعرف بالصيغة $k(x)=3x^2-5x+4$

1. احسب $k\left(-\frac{1}{2}\right)$.
2. عيّن أسلاف العدد 4 أي قيم x التي تحقق $k(x)=4$.

الحل:1).

$$k(x)=3\left(\frac{-1}{2}\right)^2-5\left(\frac{-1}{2}\right)+4$$
$$k(x)=\frac{3}{4}+\frac{5}{2}+4=\frac{3+10+16}{4}=\frac{29}{4}$$

2). $4=3x^2-5x+4$

$$3x^2-5x=0$$

وبالتحليل نجد $x(3x-5)=0$

أما $x=0$ او $3x-5=0$

ومنه $3x=5$

ومنه $x=\frac{5}{3}$

حل التمارين التالية

التمرين 1: إذا كان التابع f المعرف بالصيغة $f(x)=(x-2)^2-3x+6$ **والمطلوب:**

1) أوجد $f(0)$, $f(2)$.
2) حلل $f(x)$ إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.
3) حل المعادلة $f(x)=0$.

الحل:1)

$$f(0)=(0-2)^2-3(0)+6$$
$$f(0)=4-0+6=\boxed{10}$$
$$f(2)=(2-2)^2-3(2)+6$$
$$f(2)=0-6+6=\boxed{0}$$

2).

$$f(x)=(x-2)^2-3x+6$$
$$f(x)=(x-2)^2-3(x-2)$$
$$f(x)=(x-2)[(x-2)-3]$$
$$f(x)=(x-2)(x-5)$$

3). $f(x)=0$ ومنه $(x-2)(x-5)=0$

إما $x-5=0$ $x=5$ او $x-2=0$ $x=2$

التمرين 2: f تابع معرف بالصيغة $f(x)=4x^2-3x+1$ **والمطلوب:**

1) احسب $f(1)$, $f(\sqrt{2})$
2) جد اسلاف العدد 1

الحل:1).

$$f(0)=4(1)^2-3(1)+1$$
$$f(0)=4-3+1=\boxed{2}$$
$$f(\sqrt{2})=4(\sqrt{2})^2-3(\sqrt{2})+1$$
$$f(\sqrt{2})=8-3\sqrt{2}+1=\boxed{9-3\sqrt{2}}$$

2). $f(x)=1$ ومنه $4x^2-3x+1=1$

$$4x^2-3x=1-1$$
$$4x^2-3x=0$$
$$x(4x-3)=0$$

إما $4x-3=0$

ومنه $4x=3$ $x=\boxed{\frac{3}{4}}$

أو $x=\boxed{0}$

تمرين وظيفة: ليكن التابع f المعرف بالصيغة: $f(x)=(3x-5)^2-(3x-5)(x+2)$ **المطلوب:**

1) انشر ثم اختزل $f(x)$.
2) حلل $f(x)$.
3) احسب $f(\frac{5}{3})$.
4) أوجد اسلاف العدد 0.

مفهوم الاحتمال

التجربة العشوائية هي تجربة لها عدد من النتائج الممكنة ولا نعرف أية نتيجة من النتائج ستقع أولاً

لاحظ وانتبه

1. جميع النتائج الممكنة للتجربة تكون معلومة قبل التجربة.
2. لايمكن توقع أي نتيجة بشكل مؤكد قبل القيام بالتجربة.
3. يمكن معرفة احتمال ظهور كل نتيجة من نتائج التجربة قبل القيام بالتجربة.

مجموعة جميع النتائج الممكنة للتجربة تسمى فضاء العينة

نرمز لمجموعة جميع النتائج الممكنة بالرمز Ω

نرمز للحدث بحرف ابجدي A مثلاً

ولاحتماله نرمز له $P(A)$

قانون الاحتمال $$P(A)=\frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

في تجربة إلقاء حجر نرد فإن مجموعة النتائج هي

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

كل نتيجة لهذه التجربة (حدثاً بسيطاً)

وهو غير قابل للتجزئة فهو نتيجة واحدة فقط

احتمال حدث بسيط هو عدد محصور بين الصفر والواحد

أي أن $\boxed{0<P(E)<1}$

في تجربة رمي حجر النرد الحدث M

ظهور العدد 2 هو حدث بسيط يتكون من (نتيجة واحدة)

واحتمال ذلك الحدث M هو $P(M)=P(2)=\frac{1}{6}$

مجموع احتمالات الأحداث البسيطة في أي تجربة احتمالية يساوي الواحد

في التجربة السابقة مجموع الاحداث البسيطة هو

$$=P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

نسمي كل مجموعة جزئية من نتائج التجربة(حدثاً)

وهو الحدث الذي يمكن تجزئته إلى أحداث

ويكون احتمال أي حدث هو $\boxed{0\le P(E)\le 1}$

في تجربة رمي حجر النرد حدث ظهور عدد اولي H

هو حدث يتكون من عدة نتائج

ونتائج ذلك الحدث H هي $\{2,3,5\}$

احتمال الحدث H هو مجموع احتمالات الاحداث البسيطة المُشَكِّلة للحدث

$$P(H)=P(2)+P(3)+P(5)$$
$$P(H)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

الحدث المستحيل: هو حدث غير قابل للتحقيق ورمزه $\varnothing$

واحتماله صفر أي أن $P(\varnothing)=0$

في تجربة رمي حجر النرد: الحدث B ظهور عدد رقم 7 هو حدث مستحيل

ويكون احتمال الحدث B هو $P(B)=P(\varnothing)=0$

الحدث الأكيد هو الحدث الذي لابد أن يتحقق رمزه Ω

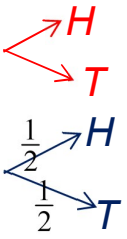
واحتماله الواحد أي أن $P(\Omega)=1$

في تجربة رمي حجر النرد الحدث C ظهور عدد أصغر تماما من 7 هو حدث أكيد

$$P(C)=P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)$$
$$P(C)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1=P(\Omega)$$

نعبر عن تجربة احتمالية بمخطط شجري نسميه (شجرة الامكانات)

الشكل المجاور يمثل شجرة الامكانات لتجربة رمي قطعة نقود



الشكل المجاور يمثل شجرة محملة بالاحتمالات

هام جدا:

(((على شجرة الامكانات احتمال حدث E هو مجموع احتمالات فروع الشجرة التي تؤدي الى الحدث E)))

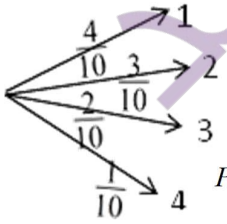
مثال1: كيس يحوي 10 كرات

رُقمت بالأرقام: $1,1,1,1,2,2,2,3,3,4$

1) اكتب النتائج الممكنة ثم عبر عن هذه التجربة بشجرة محملة بالاحتمالات
2) احسب احتمال E الحصول على عدد زوجي
3) احسب احتمال الحدث A الحصول على عدد أصغر تماما من 3
4) احسب احتمال الحدث B الحصول على عدد n يحقق $2<n<4$
5) احسب احتمال H الحصول على عدد فردي

الحل: 1) $\Omega=\{1,2,3,4\}$

الشجرة



2) $$P(E)=P(2)+P(4)$$
$$P(E)=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

3) $$P(A)=P(2)+P(1)$$
$$P(A)=\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$$

4) $$P(B)=P(3)$$
$$P(B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

5) $$P(H)=P(1)+P(3)$$
$$P(H)=\frac{4}{10}+\frac{2}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

أحداث متنافية وأحداث متعاكسة

الحدثان المتنافيان: هما حدثان لا يشتركان بأي نتيجة
أي (يستحيل تحققهما معا)

*** في المثال1:** الحدثان $E=\{2,4\}$ و $B=\{3\}$
لا يشتركان بأية نتيجة فهما(حدثان متنافيان)

**** في المثال1:** الحدثان $A=\{2,1\}$ و $E=\{2,4\}$
يشتركان بالنتيجة 2 فهما(حدثان ليسا متنافيان)

الحدثان المتعاكسان: هما حدثان لايشتركان بأي نتيجة فهما (متنافيان)ومجموع احتماليهما (1)

*** في المثال1:** الحدثان $E=\{2,4\}$ و $H=\{1,3\}$
لا يشتركان بأية نتيجة فهما متنافيان
ومجموع احتماليهما هو:

$$P(E)+P(H)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=\frac{5}{5}=\boxed{1}$$

فهما (حدثان متعاكسان)

**** في المثال1:** الحدثان $E=\{2,4\}$ و $B=\{3\}$
لا يشتركان بأية نتيجة فهما متنافيان
ومجموع احتماليهما هو:

$$P(E)+P(B)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}\neq\boxed{1}$$

فهما (حدثان ليسا متعاكسان)

(مجموع احتمالي حدثين متعاكسين هو الواحد)

أي أن: $P(A)+P(A')=1$

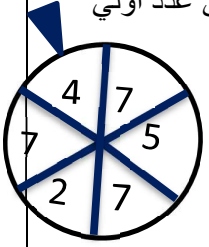
في المثال السابق احتمال الحدث المعاكس للحدث E هو $P(E')=1-P(E)$

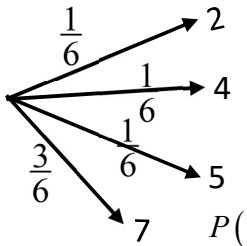
$$P(E')=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}=P(H)$$

تمرين1: يدور دولاب ممثل بالشكل المجاور ليستقر على أحد الأرقام التالية $2,4,5,7$

1. ارسم شجرة الإمكانات وحمل على فروعها الاحتمالات
2. احسب احتمال الحصول على العدد (7) وعلى العدد (4)
3. احسب احتمال الحدث E الحصول على عدد أولي

الحل:





1. الشجرة

2. $P(7)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$P(4)=\frac{1}{6}$

3. $P(E)=P(2)+P(5)+P(7)$

$P(E)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$

تمرين2: في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة

1) اكتب النتائج الممكنة ثم عبر عن هذه التجربة بشجرة محملة بالاحتمالات
2) احسب احتمال E الحصول على عدد زوجي
3) الحدث A الحصول على عدد أصغر تماما من 5
4) الحدث B الحصول على عدد n يحقق $2\le n\le 4$
5) الحدث C الحصول على عدد n يحقق $1\le n\le 6$

الحل: 1) $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ والشجرة

2) $P(E)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

3) $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

4) $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

5) $P(C)=\frac{6}{6}=1$

تمرين3: نلقي حجر نرد متجانس، أوجهه محملة بالأرقام $1,2,3,4,5,6$. ونعرّف الأحداث الآتية:
A: «ظهور عدد أصغر أو يساوي 2 »
B: «ظهور عدد أكبر تماماً من 4 »
1. الحدثان A و B متنافيان. لماذا؟
احسب احتمال A ثم احتمال B.
2. احسب احتمال الحدث E:
ظهور عدد n يحقق $n\le 2$ أو $n>4$

الحل:

1) الحدثان A,B متنافيان لأنهما لا يشتركان بأية نتيجة

$$P(A)=P(1)+P(2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(B)=P(5)+P(6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

2) $E=\{1,2,5,6\}$
$P(E)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ أو $P(E)=P(A)+P(B)$

تمرين4: في اللعبة الواردة في التمرين السابق،
نعرّف الحدثين الآتيين:
I: « ظهور عدد فردي »
J: « ظهور عدد زوجي »
1. الحدثان I و J متعاكسان. لماذا؟
احسب احتمال الحدث I.
2. احسب احتمال الحدث J بطريقتين مختلفتين.

الحل: 1) الحدثان $I=\{1,3,5\}, J=\{2,4,6\}$
لا يشتركان بأية نتيجة فهما متنافيان
وهما يشكلان مجموعة جميع نتائج التجربة Ω
فإن مجموع احتماليهما هو العدد(1) فهما متعاكسان

2) طريقة1: $P(J)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

طريقة2: $P(J)=1-P(I)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

1 التناسب

التناسب هو مساواة بين نسبتين $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

نسمي a ، d طرفي التناسب و b ، c وسطي التناسب

خواص التناسب

1. إذا قلبنا النسبتين نحصل على تناسب جديد أي $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$
2. إذا بادلنا بين طرفي التناسب نحصل على تناسب جديد أي $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$
3. إذا بادلنا بين وسطي التناسب نحصل على تناسب جديد أي $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$
4. إذا ثبتنا المقامين وأضفنا كل مقام إلى البسط الموافق له نحصل على تناسب جديد $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$
5. إذا ثبتنا المقامين وطرحنا كل مقام من البسط الموافق له نحصل على تناسب جديد $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$
6. إذا ثبتنا البسطين وأضفنا كلّ بسط إلى المقام الموافق له نحصل على تناسب جديد $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$
7. إذا ثبتنا البسطين وطرحنا من كل مقام البسط الموافق له نحصل على تناسب جديد $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$
8. في كل تناسب جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين

إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ فإن $a\times d=b\times c$

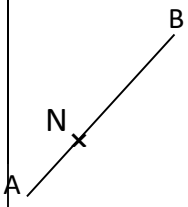
9. أي نسبة من التناسب تساوي نسبة مجموع البسوط الى مجموع المقامات

في التناسب $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ **فإن:** $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2+4}{3+6}=\frac{6}{9}$

10. إذا قمنا بتربيع التناسب نحصل على تناسب جديد

إذا ربعنا التناسب $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ **فإن :** $\frac{4}{9}=\frac{16}{36}$

مثال في الشكل المجاور $\frac{AN}{NB}=\frac{2}{3}$



احسب كلّاً من AN و NB

الحل: لدينا $\frac{AN}{NB}=\frac{2}{3}$

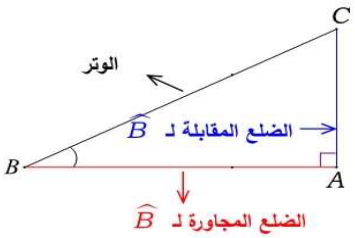
ومنه $\frac{AN+NB}{NB}=\frac{2+3}{3}$

ومنه $\frac{100}{NB}=\frac{5}{3}$

ومنه $NB=60$

ومنه $AN=100-60=40$

2 النسب المثلثية لزاوية حادة



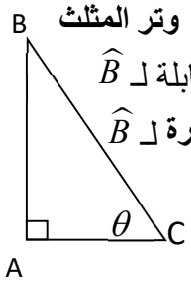
مصطلحات

- النسبة $\frac{AC}{BC}$ تسمى جيب الزاوية $\widehat{B}$. نرمز إليها بالرمز $\sin\widehat{B}$.
- النسبة $\frac{AB}{BC}$ تسمى تجيب الزاوية $\widehat{B}$ ، نرمز إليها بالرمز $\cos\widehat{B}$.
- النسبة $\frac{AC}{AB}$ تسمى ظل الزاوية $\widehat{B}$. نرمز إليها بالرمز $\tan\widehat{B}$.

في المثلث القائم الزاوية في A فيه BC وتر المثلث

الضلع AC مجاورة للزاوية $\widehat{C}$ ومقابلة لـ $\widehat{B}$

الضلع AB مقابلة للزاوية $\widehat{C}$ ومجاورة لـ $\widehat{B}$



الرمز (θ) يُقرأ (تيتا)

$\sin\hat{\theta}=\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الوتر}}$ جيب $\hat{\theta}$

$\cos\hat{\theta}=\frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}{\text{طول الوتر}}$ تجيب $\hat{\theta}$

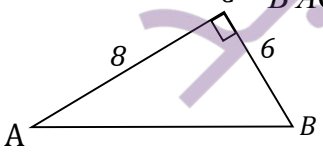
$\tan\hat{\theta}=\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}$ ظل $\hat{\theta}$

ملاحظة: *1-* a زاوية حادة فإن: $\begin{matrix}0<\sin\alpha<1\\0<\cos\alpha<1\end{matrix}$

3- النسب المثلثية ليس لها واحدة قياس

4- النسب المثلثية لزاوية حادة هي أعداد موجبة

تطبيق : في الشكل المجاور



أحسب النسب المثلثية للزاوية $B\hat{A}C$

حسب مبرهنة فيثاغورث نجد

$BA^2=AC^2+BC^2$

ومنه $BA^2=8^2+6^2$

$BA^2=64+36$

$BA^2=100$

ومنه $BA=\sqrt{100}=10$

$\sin\hat{A}=\frac{BC}{AB}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

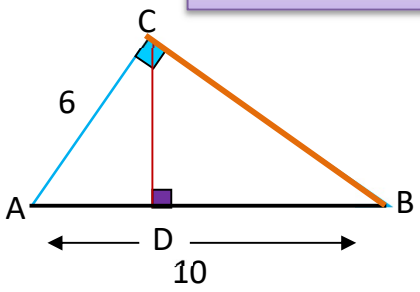
$\cos\hat{A}=\frac{AC}{AB}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

$\tan\hat{A}=\frac{BC}{AC}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

انتبه و استفد و استعد

في الشكل المجاور

1) أحسب BC
2) أحسب CD
3) أحسب DB



الحل: **1-حساب BC : حسب مبرهنة فيثاغورث**

نجد $BA^2 = AC^2 + BC^2$

ومنه $10^2 = 6^2 + BC^2$

$100 = 36 + BC^2$

$BC^2 = 100 - 36 = 64$

$BC = \sqrt{64} = 8$

2-حساب CD((الارتفاع في المثلث القائم الزاوية))

في المثلث القائم ABC لدينا

$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ .....(1)

وفي المثلث القائم ADC لدينا

$Sin \hat{A} = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{6}$ .....(2)

من (1) و(2) نجد: $\frac{CD}{6} = \frac{4}{5}$

ومنه نجد $CD = \frac{4 \times 6}{5} = \frac{24}{5}$

3- حساب DB((أحد جزأي الوتر المعينين بالارتفاع))

***يمكن حساب BD بحسب فيثاغورث

في المثلث القائم CDB

أو بالشكل التالي

في المثلث القائم ABC لدينا

$Cos \hat{B} = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ .....(1)

وفي المثلث القائم BDC لدينا

$Cos \hat{B} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{8}$ .....(2)

من (1) و(2) نجد: $\frac{BD}{8} = \frac{4}{5}$

$BD = \frac{4 \times 8}{5}$

$BD = \frac{32}{5}$

استخدام النسب المثلثية في حساب اطوال الاضلاع

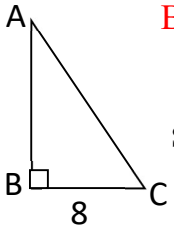
1- إذا كانت النسبة المعلومة هي جيب الزاوية يمكن استعمالها لحساب طول الضلع المقابلة لتلك الزاوية أو لحساب طول الوتر

2- إذا كانت النسبة المعلومة هي تجيب الزاوية يمكن استعمالها لحساب طول الضلع المجاورة لتلك الزاوية أو لحساب طول الوتر.

3- إذا كانت النسبة المعلومة هي ظل الزاوية يمكن استعمالها لحساب طول الضلع المقابلة لتلك الزاوية أو لحساب طول الضلع المجاورة لها

تطبيق على ما سبق:

1- في الشكل المجاور ABC مثلث قائم في B



فيه $\sin B\hat{A}C = \frac{4}{5}$ ، BC=8

والمطلوب أحسب طول الوتر AC

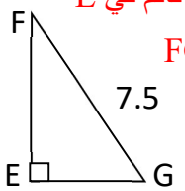
الحل: نعلم أن $\sin B\hat{A}C = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

بالتعويض نجد $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

ومنه AC=……..

ومنه AC=……..

2- في الشكل المجاور EFG مثلث قائم في E



فيه $\cos E\hat{F}G = \frac{2}{3}$ ، FG=7.5

والمطلوب أحسب EF

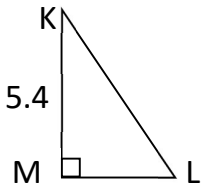
الحل: نعلم أن $\cos E\hat{F}G = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

بالتعويض نجد $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

ومنه EF = ……..

ومنه EF = ……..

3- في الشكل المجاور KLM مثلث قائم في M



فيه $\tan M\hat{K}L = \frac{1}{3}$ ، KM=5.4

والمطلوب أحسب ML

الحل: نعلم أن $\tan M\hat{K}L = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

بالتعويض نجد $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

ومنه ML = ……..

ومنه ML = ……..

حالات إثبات أن المثلث قائم الزاوية

1-عكس فيثاغورث

إذا كان في مثلث مربع طول ضلع يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين فالمثلث قائم ووتره تلك الضلع

2-عكس المتوسط

إذا كان في مثلث طول المتوسط المتعلق بضلع يساوي نصف طول تلك الضلع فالمثلث قائم ووتره تلك الضلع

3- ضلع المثلث وقطر الدائرة

إذا كان إحدى أضلاع المثلث قطر للدائرة المارة برؤوسه كان المثلث قائم الزاوية ووتره قطر الدائرة

4- المماس وقطر الدائرة

المماس لدائرة عمود على نصف القطر في نقطة التماس

علاقتان مهمتان بين النسب المثلثية

إذا كانت θ زاوية حادة في مثلث قائم :

أولا : $Sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

ثانيا: $Tan(\theta)=\dfrac{Sin(\theta)}{Cos(\theta)}$

تمرين1: إذا كانت θ زاوية حادة وكان: $Sin\theta=\dfrac{3}{5}$

احسب $cos(\theta)\ ,tan(\theta)$

الحل: نعلم أن $Sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$(\frac{3}{5})^2+\cos^2\theta=1$$

$$\frac{9}{25}+\cos^2\theta=1$$

$$\cos^2\theta=1-\frac{9}{25}$$

$$\cos^2\theta=\frac{25}{25}-\frac{9}{25}$$

$$\cos^2\theta=\frac{16}{25}$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{16}{25}}=\boxed{\frac{4}{5}}$$

ومنه $Tan(\theta)=\dfrac{Sin(\theta)}{Cos(\theta)}=\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}$ $Tan(\theta)=\dfrac{3}{4}$

تمرين2: إذا كانت θ زاوية حادة وكان: $cos(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

احسب $sin(\theta)\ ,tan(\theta)$

الحل: نعلم أن $Sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$Sin^2\theta+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=1$$

$$Sin^2\theta+\frac{3}{4}=1$$

$$Sin^2\theta=1-\frac{3}{4}$$

$$Sin^2\theta=\frac{4}{4}-\frac{3}{4}$$

$$Sin^2\theta=\frac{1}{4}$$

$$Sin\theta=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

ومنه $Tan(\theta)=\dfrac{Sin(\theta)}{Cos(\theta)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $Tan(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

تمرين3: إذا كانت θ زاوية حادة وكان: $tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

احسب $sin(\theta)\ ,\cos(\theta)$

الحل: نعلم أن $Tan(\theta)=\dfrac{Sin(\theta)}{Cos(\theta)}$ ومنه $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{Sin(\theta)}{Cos(\theta)}$

بتربيع الطرفين ومنه $\dfrac{(1)^2}{(\sqrt{3})^2}=\dfrac{Sin^2(\theta)}{Cos^2(\theta)}$ $\dfrac{1}{3}=\dfrac{Sin^2(\theta)}{Cos^2(\theta)}$

وحسب خواص التناسب $\dfrac{1}{3+1}=\dfrac{Sin^2(\theta)}{Cos^2(\theta)+Sin^2(\theta)}$

لأن $Sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ $\dfrac{1}{4}=\dfrac{Sin^2(\theta)}{1}$

إذا: $Sin^2(\theta)=\dfrac{1}{4}$ ومنه $Sin(\theta)=\boxed{\frac{1}{2}}$

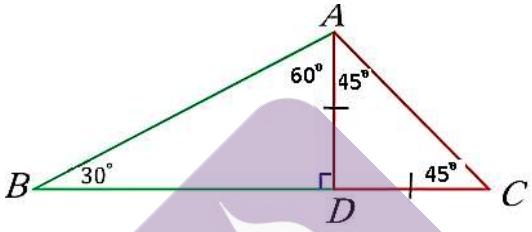
نعوض في العلاقة $Tan(\theta)=\dfrac{Sin(\theta)}{Cos(\theta)}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{Cos(\theta)}$$

ومنه $Cos(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{1}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

نسب زوايا شهيرة

تفيد النسب المثلثية الأساسية للزوايا الشهيرة وهي $(30°, 45°, 60°)$ في حساب طول ضلع من أضلاع المثلث القائم وأجزاء الأضلاع في حالة عُلِمَ طول ضلع و قياس زاوية شهيرة كما يلي



الزاوية / النسبة المثلثية	$30°$	$45°$	$60°$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين الحادتين في المثلث القائم:

**وجدنا سابقا أن الزاويتين الحادتين في المثلث القائم متتامتين ((مجموعهما 90^0))

إذا كانت x قياس زاوية حادة

فإنّ الزاوية المتتمة لها هي $(90° - x)$ ويكون

هام

$$Sin\theta = Cos\left(90^0 - \theta\right)$$

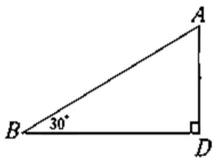
مثال : $sin(35^\circ) = cos(90^\circ - 35^\circ) = cos(55^\circ)$

مثال : $cos(30^\circ) = sin(90^\circ - 30^\circ) = \sin(60^\circ)$

نتائج هامة في المثلث القائم

خاصة الضلع المقابلة لزاوية

في المثلث القائم طول الضلع المقابلة لزاوية قياسها 30^0 يساوي نصف طول الوتر

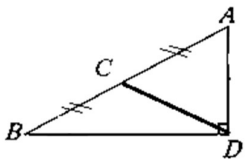


في الشكل المجاور ABD مثلث قائم

فيه $\widehat{B} = 30^0$ فإن $AD = \frac{1}{2}AB$

خاصة المتوسط المتعلق بالوتر

في المثلث القائم طول المتوسط المتعلق بالوتر يساوي نصف طول الوتر



في الشكل المجاور ABD مثلث قائم

فيه CD متوسط متعلق بالوتر

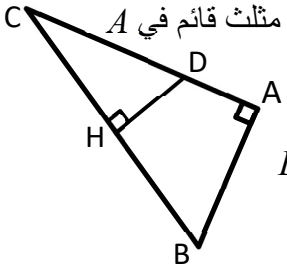
فإن $CD = \frac{1}{2}AB$

ملاحظات هامة: لحساب طول ضلع في مثلث قائم

1) إذا علم في المثلث القائم طولا ضلعين نحسب الضلع الثالث بناءاً على فيثاغورث
2) إذا علم في المثلث طول ضلع ونسبة مثلثية نستخدم النسبة المثلثية المعطاة
3) إذا علم في المثلث طول ضلع وقياس زاوية شهيرة نستفيد من النسب المثلثية للزاوية الشهيرة
4) إذا كانت الزاويتان متساويتان بالتقابل بالرأس او متممتا نفس الزاوية أو لسبب ما فإن لهما الجيب ذاته والتجيب ذاته والظل ذاته

****

تمرين: في الشكل المجاور ABC مثلث قائم في A



$DC = 5, AD = 3, AB = 6$

1) أحسب BC

2) أوجد $sin\widehat{C}$ واستنتج طول DH

3) احسب طول CH

الحل:

1) حسب فيثاغورث $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 36+64$ ومنه $BC^2 = 100$ ومنه $BC = \boxed{8}$

2) حساب DH و $sin\widehat{C}$

$sin\widehat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$sin\widehat{C} = \frac{DH}{DC} = \frac{DH}{5}$

ومنه $\frac{DH}{5} = \frac{3}{5}$ ومنه $DH = 3$

3) حساب CH

$\cos\widehat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\cos\widehat{C} = \frac{HC}{DC} = \frac{HC}{5}$

ومنه $\frac{HC}{5} = \frac{4}{5} \Leftarrow HC = \boxed{4}$

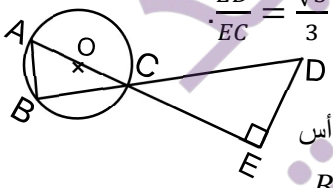
تمرين: B نقطة من الدائرة التي مركزها O وقطرها AC

$AC = 10cm$ و $AB = 5cm$ والمطلوب:

1) اشرح لماذا $A\hat{C}B = D\hat{C}E$.

2) احسب طول الضلع BC ثم احسب $tanA\hat{C}B$.

اوجد $tan\,D\hat{C}E$ واستنتج أن $\frac{ED}{EC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



الحل:

1) $A\hat{C}B = D\hat{C}E$ بالتقابل بالرأس.

المثلث ABC قائم الزاوية في B

لأن ضلعه AC قطر للدائرة المارة برؤوسه

حسب فيثاغورث في المثلث ABC نجد $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$100 = 25 + BC^2$ ومنه $BC^2 = 75$ و منه $BC = \boxed{5\sqrt{3}}$

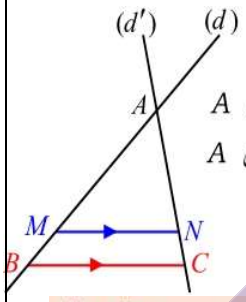
$\tan A\hat{C}B = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{DE}{EC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ومنه $\tan D\hat{C}E = \frac{DE}{EC}$

لأن $A\hat{C}B = D\hat{C}E$

1 مبرهنة النسب الثلاث

نص مبرهنة النسب الثلاث



(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A

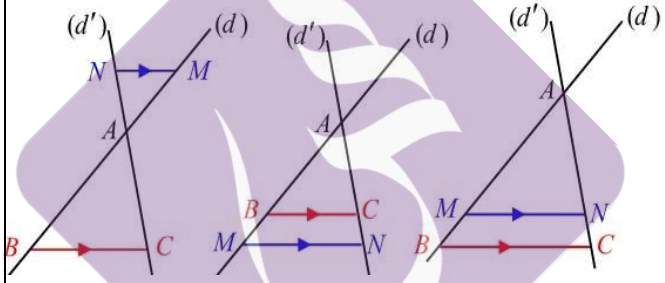
النقطتان B و M من (d) مختلفتان عن A

النقطتان C و N من (d') مختلفتان عن A

إذا كان (BC) و (MN) متوازيين

كان $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

الحالات الثلاث لمبرهنة النسب الثلاث



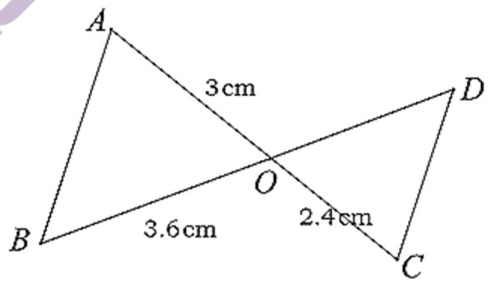
عند استعمال المبرهنة نرتب الحروف وفق الجدول

A	M	N
A	B	C

مع مراعاة أن النقط التي تنتمي لمستقيم واحد تقع على عمود واحد

مثال في الشكل المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان

احسب الطول OD



الحل:

$AB//CD$

حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$$

بالتعويض نجد

$$\frac{3}{2.4}=\frac{3.6}{OD}=\frac{AB}{CD}$$

$$OD=\frac{3.6\times 2.4}{3}$$

$$OD=2.88$$

2 عكس مبرهنة النسب الثلاث

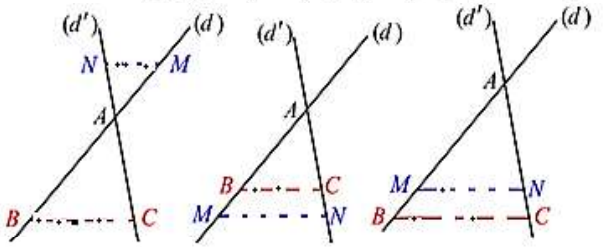
(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A

إذا كان ترتيب النقاط A و B و M على (d)

مماثلا لترتيب النقاط A و C و N على (d')

و كان $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$،

كان المستقيمان (BC) و (MN) متوازيين.

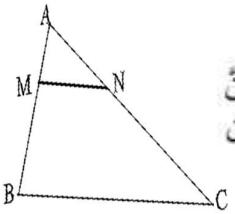


مثال:

في الشكل $AB=35$ و $AC=52$

$AM=11.9$ و $AN=18.2$ أثبت أنّ

المستقيمين (BC) و (MN) غير متوازيين



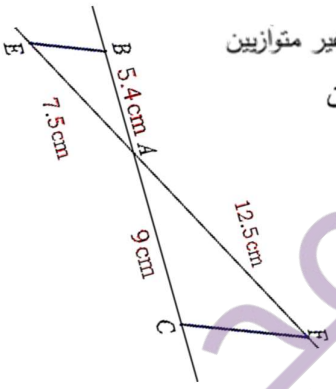
الحل: لدينا $\frac{AM}{AB}=\frac{11.9}{35}=0.34$

$$\frac{AN}{AC}=\frac{18.2}{52}=0.35$$

ومنه $\frac{AM}{AB}\neq\frac{AN}{AC}$

فالمستقيمين (BC) و (MN) غير متوازيين

مثال في الشكل أثبت أنّ المستقيمين (BE) و (FC) متوازيان.



الحل

$$\frac{AB}{AC}=\frac{5.4}{9}=0.6$$

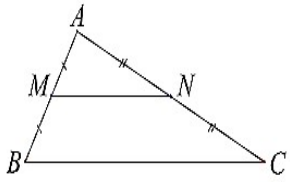
$$\frac{AE}{AF}=\frac{7.5}{12.5}=0.6$$

نستنتج أنّ $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AF}$

(BE) و (FC) متوازيين.

حالة خاصة: القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين

القطعة المستقيمة المحدودة بمنتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالثة وتساوي نصف طولها



M منتصف $[AB]$

N منتصف $[AC]$

فإن $MN\parallel BC$

$$MN=\frac{1}{2}BC$$

3 التشابه

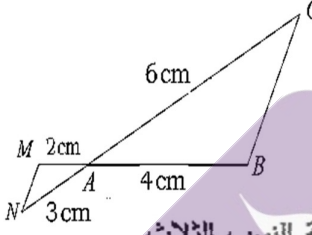
إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتقابلة في مثلثين قلنا إنَّ المثلثين **متشابهان**

ويكون أحدهما مصغر أو مكبر عن الآخر أو مطابق له

تطبيق: في الشكل المجاور C

برهن أن المثلث AMN تصغير للمثلث ABC

ثم عين معامل التصغير



الحل:

$(MN)\parallel(BC)$ حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{NM}{CB}=\frac{NA}{CA}=\frac{AM}{AB}=\frac{2}{3}$$

المثلثان ABC و AMN متشابهان

لتساوي النسب الثلاث ويكون

المثلث AMN مصغراً عن المثلث ABC

نسبة التصغير $\frac{2}{3}$

في المثلثين المتشابهين :
كل زاويتين متقابلتين متساويتين

خاصة 1 تشابه نسبته $k>0$

- يحافظ على قياسات الزوايا. • يُضرب الأطوال بالعدد k.

إذا كانت نسبة التشابه $k>1$ يؤول التشابه إلى تكبير الشكل.

إذا كانت نسبة التشابه $0<k<1$ يؤول التشابه إلى تصغير الشكل

خاصة 2

تشابه نسبته $k>0$.

- تُضرب مساحة السطح بالعدد k^2.
- يُضرب حجم المجسم بالعدد k^3.

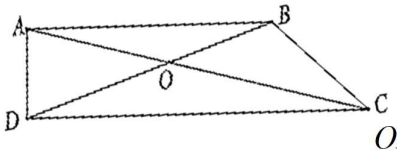
قطرا الرباعي $ABCD$ متقاطعان في O

$OA=6.5$ cm و $OB=5$ cm

$OC=9.1$ cm ، $OD=7$ cm

أثبت أنَّ الرباعي $ABCD$ شبه منحرف

الحل:



$$\frac{OB}{OD}=\frac{5}{7}$$

$$\frac{OA}{OC}=\frac{6.5}{9.1}=\frac{65}{91}=\frac{5}{7}$$

فحسب عكس النسب الثلاث يكون DC , AB متوازيين

فالرباعي $ABCD$ فيه ضلعان متوازيان فهو شبه منحرف

تمرين: في الشكل المجاور ABC مثلث أطوال أضلاعه: $AB=8$ ، $AC=6$ ، $BC=7$

D نقطة من BC نرسم من C مستقيماً يوازي AD يقطع ممدد BA في النقطة E، فإذا كان $AE=6$

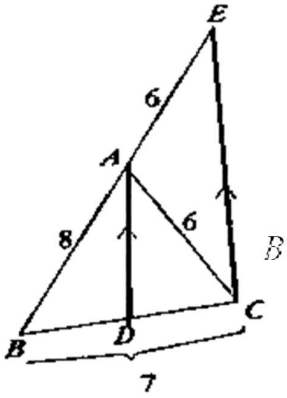
المطلوب :

1) المثلث BDA تصغير للمثلث BCE : اكتب النسب الثلاث واحسب طول $[BD]$ ثم استنتج طول $[DC]$.

2) احسب كلاً من النسب: $\frac{BA}{\quad}$ و $\frac{BD}{\quad}$ وقارن بينهما .

3) أثبت أن $D\hat{A}C=A\hat{C}E$ ، $D\hat{A}B=C\hat{E}A$

ثم استنتج أن: AD منصف للزاوية $B\hat{A}C$



1) لدينا فرضاً $AD\parallel EC$

حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{BD}{\quad}=\frac{BA}{\quad}=\frac{AD}{\quad}$$

فالمثلث BDA تصغير للمثلث BCE

$$\frac{BD}{7}=\frac{8}{14}=\frac{AD}{\quad}$$

ومنه:

$$BD=\frac{8\times 7}{14}$$

ومنه $DC=7-4$

$$DC=\boxed{3}$$

2) نحسب $\frac{BA}{CA}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

ولدينا من الطلب الأول $\frac{BD}{\quad}=\frac{4}{\quad}$

وبالموازنة نجدأن النسبتين متساويتين

أي أن $\frac{BD}{3}=\frac{BA}{6}=\frac{4}{\quad}$

3) لدينا $D\hat{A}C=A\hat{C}E$ بالتبادل الداخلي

بالنسبة للمستقيمين المتوازيين EC,AD والقاطع AC

ولدينا $D\hat{A}B=C\hat{E}A$ بالتناظر

بالنسبة للمستقيمين المتوازيين EC,AD والقاطع BE

وبما أن المثلث ACE متساوي الساقين

أي أن $A\hat{C}E=A\hat{E}C$

فإن: $D\hat{A}C=D\hat{A}B$

ومنه **نستنتج** أن: AD منصف للزاوية $B\hat{A}C$

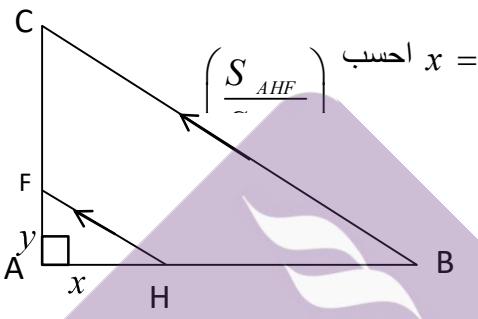
تمرين أول: ABC مثلث قائم في A ،
طولا ضلعه القائمين $AB = 8\ cm$ ، $AC = 6\ cm$

1) احسب طول الوتر BC واحسب $\tan(\widehat{B})$

2) HF يوازي BC ، $AF = y$ ، $AH = x$

اكتب النسب الثلاث المتساوية ثم استنتج أن $y = \frac{3}{4}x$.

3) في حالة $x = 4$ احسب $\left(\frac{S_{AHF}}{S_{ABC}}\right)$



الحل: 1)حسب فيثاغورث في المثلث ABC
نعوض $BC^2 = 36 + 64$ ومنه $BC = 10$

$\text{Tan}\,\widehat{B} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

2)حسب مبرهنة النسب الثلاث

$\frac{AH}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{HF}{BC}$ نعوض $\frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{HF}{10}$

ومنه $y = \frac{6 \times x}{8}$ ومنه $y = \frac{3}{4}x$

3): بما أن $\frac{AH}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{HF}{BC}$

فالمثلثين ABC ، AHF متشابهين لتناسب أضلاعهما
ونسبة مساحتيهما تساوي مربع نسبة التشابه

$\frac{S_{AHF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{4}{8}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

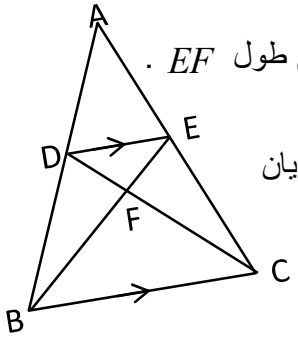
تمرين ثاني: ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A
فيه المستقيمان (DE) و (BC) متوازيان
والمستقيمان (BE) ، (CD) متقاطعان في F

$AD = 2\ cm$ ، $DB = 3\ cm$ ، $BF = 4\ cm$.

1) اذا كان المثلث ADE تصغير للمثلث ABC
اكتب النسب الثلاث ثم اكتب معامل التصغير.

2) اذا كان المثلث FDE تصغير للمثلث FBC
اكتب النسب الثلاث.

3) اثبت ان $\frac{FE}{EF} = \frac{2}{3}$ واستنتج طول EF .



الحل: 1) (DE) و (BC) متوازيان
حسب مبرهنة النسب الثلاث

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$
معامل التصغير $\frac{2}{5}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$

2) (DE) و (BC) متوازيان
حسب مبرهنة النسب الثلاث

$\frac{FD}{FB} = \frac{DE}{BC} = \frac{FE}{FC}$

3): من (1) و(2) نجد

$\frac{AD}{AB} = \frac{FE}{FC}$ وبالتعويض نجد $\frac{2}{5} = \frac{FE}{FC}$

$\frac{2}{5} = \frac{FE}{8}$ ومنه $FE = \frac{2 \times 4}{5}$ ومنه $FE = \frac{8}{5}$

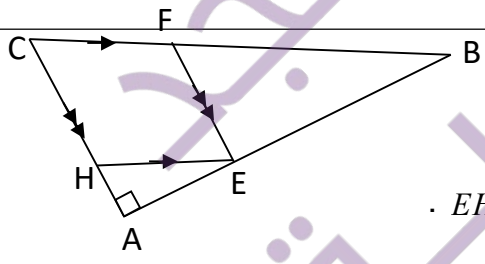
تمرين ثالث: ABC مثلث قائم في A ، $AC = 3\ cm$ ، $AB = 4\ cm$

$(EF) \parallel (AC), (EH) \parallel (BC)$ ، $AE = 1$

1) احسب طول BC

2) المثلث HAE تصغير للمثلث ACB اكتب معامل التصغير واستنتج طول EH .

3) المثلث ABC تكبير للمثلث EBF اكتب معامل التكبير واستنتج طول BF



الحل: 1) حسب فيثاغورث في المثلث ABC

$BC^2 = 9 + 16$ ومنه $BC = \boxed{5}$

2)حسب مبرهنة النسب الثلاث

$\frac{AH}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{HE}{BC}$ ومنه $\frac{AH}{3} = \frac{1}{4} = \frac{HE}{5}$

ومنه معامل التصغير $\frac{1}{4}$

لدينا $\frac{1}{4} = \frac{HE}{5}$ ومنه $HE = \frac{1 \times 5}{4}$ ومنه $HE = \frac{5}{4}$

3) حسب مبرهنة النسب الثلاث

$\frac{BA}{BE} = \frac{BC}{BF} = \frac{AC}{EF}$

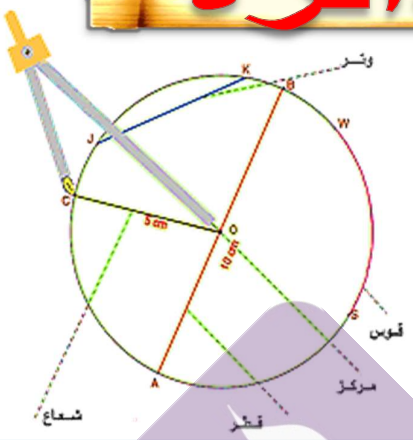
فالمثلث ABC تكبير للمثلث EBF

نعوض $\frac{4}{3} = \frac{5}{BF} = \frac{3}{FE}$ ومنه معامل التكبير $\frac{4}{3}$

من التناسب السابق لدينا $\frac{4}{3} = \frac{5}{BF}$

ومنه $BF = \frac{5 \times 3}{4}$ ومنه $BF = \frac{15}{4}$

الدائرة



الدائرة: هي مجموعة نقط المستوي التي تبعد عن نقطة ثابتة(المركز)بعداً ثابتا(نصف القطر)رمزها (C)

نسمي النقطة الثابتة مركز الدائرة O
والبعد الثابت نصف القطر رمزه R
تتعين الدائرة (C)
بمركزها O و نصف قطرها R
نقول الدائرة $C_{(O,R)}$

وتر الدائرة هو قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين منها

قوس الدائرة هو جزء من الدائرة محدود بنقطتين

نصف قطر الدائرة هو قطعة مستقيمة تصل بين المركز ونقطة

قطر الدائرة هو وتر فيها يمر من مركزها $d = 2R$

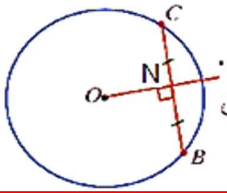
قطرالدائرة يقسمها إلى قوسن طبوقين قياس كل منهما 180°

لتكن C دائرة مركزها O و نصف قطرها R
ولتكن M نقطة من المستوى

- إذا كان M نقطة من C فإن $OM = R$
- إذا كان $OM = R$ فإن M نقطة من C

- قطر الدائرة محور تناظر لها
- ومركزها مركز تناظر لها
- مساحتها: $S = \pi R^2$
- محيطها: $P = 2\pi R = d\pi$

خاصة

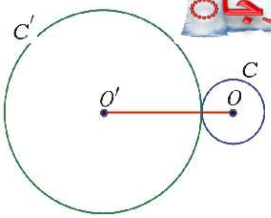


- المستقيم المار من مركز دائرة ويعامد وتر فيها يمر من منتصف تلك الوتر.
- المستقيم المار من مركز دائرة ويمر من منتصف وتر فيها يعامد تلك الوتر.

1) N منتصف الوتر CB فإن $ON \perp CB$
2) $ON \perp CB$ فإن N منتصف الوتر CB

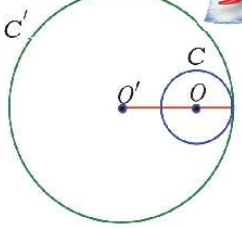
الوضع النسبي لدائرتين

1 متماستين خارجاً



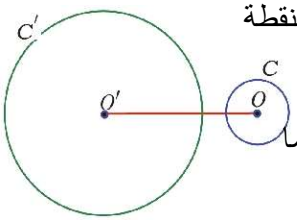
هما دائرتان تشتركان بنقطة وحيدة تسمى نقطة التماس
نلاحظ أن: $OO' = R' + R$
فالبعد بين مركزيهما يساوي مجموع نصفي قطريهما

2 متماستين داخلاً



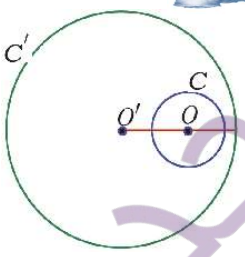
هما دائرتان تشتركان بنقطة وحيدة تسمى نقطة التماس
نلاحظ أن: $OO' = R' - R$
فالبعد بين مركزيهما يساوي فرق نصفي قطريهما

3 متباعدتين خارجاً



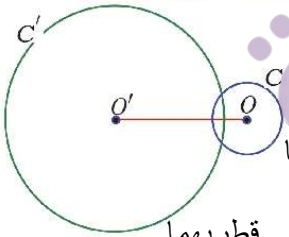
هما دائرتان لا تشتركان بأية نقطة
نلاحظ أن: $OO' > R' + R$
فالبعد بين مركزيهما أكبر تماما من مجموع نصفي قطريهما

4 متباعدتين داخلا



هما دائرتان لا تشتركان بأية نقطة
نلاحظ أن: $OO' < R' - R$
فالبعد بين مركزيهما أصغر تماما من فرق نصفي قطريهما

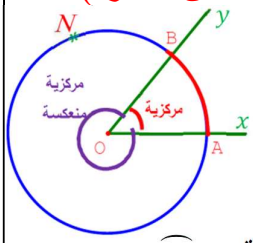
5 متقاطعتين



هما دائرتان تشتركان بنقطتين
نلاحظ أن:
$R' + R > OO' > R' - R$
فالبعد بين مركزيهما أكبر تماما من فرق نصفي قطريهما وأصغر تماما من مجموع نصفي قطريهما

الزاوية المركزية في الدائرة

تعريف :هي زاوية رأسها مركز الدائرة وضلعاها أنصاف أقطار الدائرة أو(يقطعان الدائرة)

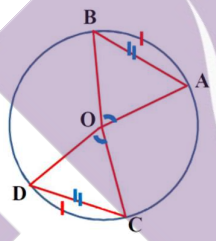


ويكون الزاوية المركزية $x\hat{o}y$ تقابل القوس $\overset{\frown}{xy}$

ويكون القوس $\overset{\frown}{xy}$ تقابل الزاوية المركزية $x\hat{o}y$

هام جداً:قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المقابل لها وبالعكس $A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$

الأقواس والأوتار في الدائرة



الزاويتان المركزيتان الطبوقتان تقابلان قوسين طبوقين

إذا كان $A\hat{O}B = C\hat{O}D$

فإن $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

القوسان الطبوقتان يقابلان زاويتين مركزيتين طبوقتين

إذا كان $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

فإن $A\hat{O}B = C\hat{O}D$

القوسان الطبوقان في دائرة يقابلان وترين طبوقين

إذا كان $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

فإن $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

الوتران الطبوقان في دائرة يقابلان قوسين طبوقين

إذا كان $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

فإن $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

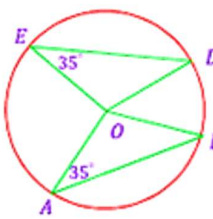
مما سبق نستنتج أن:

إذا كان $A\hat{O}B = C\hat{O}D$

كان $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

وكان $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

تطبيق:

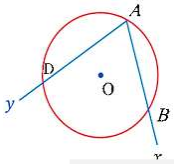


في الشكل المجاور برهن أن القوسين $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{ED}$ طبوقان

وأن الوترين $[AB]$, $[ED]$ طبوقان.

الزاوية المحيطية الدائرة

تعريف :هي زاوية رأسها نقطة من الدائرة وضلعاها أوتار الدائرة (يقطعان الدائرة)



ويكون الزاوية المحيطية $x\hat{A}y$ تقابل القوس $\overset{\frown}{DB}$

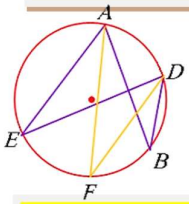
ويكون القوس $\overset{\frown}{DB}$ تقابل الزاوية المحيطية xAy

هام جداً: قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس الذي تحصره (المقابل لها) أي $B\hat{A}D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$

نتيجة: قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس

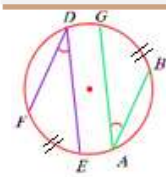
إذاً: $D\hat{A}B = \frac{1}{2}D\hat{O}B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DB}$

الزوايا المحيطية التي تحصر القوس ذاته تكون طبوقة



$A\hat{E}D = A\hat{F}D = A\hat{B}D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$

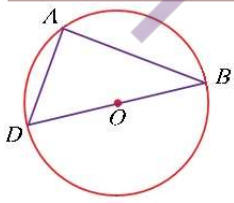
الزوايا المحيطية الطبوقة تقابل أقواس طبوقة وبالعكس



إذا كان $F\hat{D}E = G\hat{A}B$ فإن $\overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{GB}$

هام جدا:

الزاوية المحيطية التي تحصر قوس نصف الدائرة قائمة



الدائرة $C_{(O,R)}$ فيها DB قطر

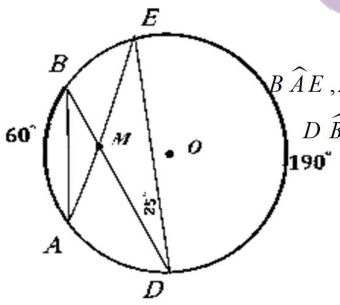
$D\hat{A}B$ زاوية محيطية

فإن : $D\hat{A}B = 90^\circ$

تمرين: في الشكل المجاور

1) أحسب قياس كل من $B\hat{A}E, \overset{\frown}{AD}$

2)أحسب $D\hat{B}A, D\hat{E}A, E\hat{M}D$

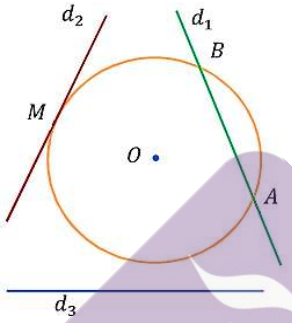


الأوضاع المختلفة لمستقيم ودائرة

d_1 قاطع للدائرة يشترك معها بنقطتين

d_2 مماس للدائرة يشترك معها بنقطة

d_3 خارج الدائرة لا يشترك معها بأي نقطة

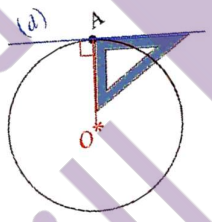


تعريف المماس

المماس (d) للدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة A من الدائرة $\mathscr{C}$
هو المستقيم المرسوم من A والعمودي على المستقيم (OA).

نتائج هامة

1 المستقيم العمود على نصف قطر دائرة في نقطة منها يكون مماسا لها



إذا كانت $N \in C(o,R)$
فإن المستقيم العمودي
على ON في النقطة N يكون مماسا لها

تفيد في إثبات وجود مماس

2 المستقيم المماس عمود على نصف قطر دائرة في نقطة التماس

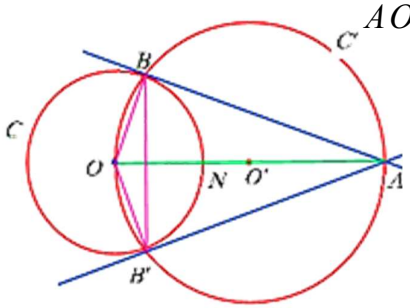
إذا كان d مماسا للدائرة $C(O,R)$ في النقطة A
فإن $d \perp (OA)$ في النقطة A

تفيد في إثبات وجود زاوية قائمة(مثلث قائم)

3 من نقطة خارج دائرة يمكن رسم مماسين لها

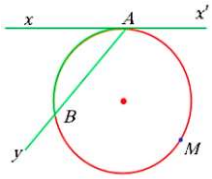
جزءا المماسين المحصورين بالنقطة A
ونقطتي التماس B, B' طبوقين

أي أن : $AB = AB'$
نستنتج ذلك من تطابق
المثلثين AOB, AOB'



الزاوية المماسية في الدائرة

تعريف : هي زاوية رأسها نقطة من الدائرة
وإحدى ضلعيها وتر والأخر مماس



$x\widehat{A}B$ زاوية مماسيه تقابل القوس $\overset{\frown}{AB}$
$x'\widehat{A}B$ زاوية مماسيه تقابل القوس $\overset{\frown}{AMB}$

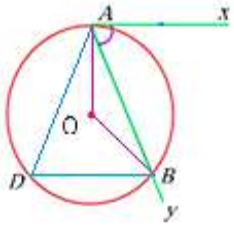
هام جداً: قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس الذي تحصره

$B\widehat{A}x = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BA}$ أي (المقابل لها)

نتائج

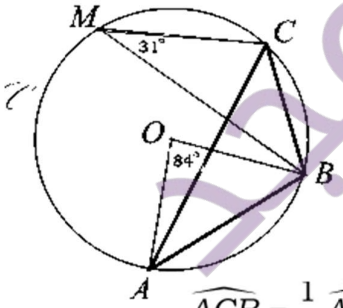
1 قياس الزاوية المماسية في دائرة يساوي
قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في ذات القوس.

2 قياس الزاوية المماسية في دائرة يساوي
نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في ذات القوس



في الشكل المجاور
$x\widehat{A}B$ زاوية مماسيه تحصر $\overset{\frown}{AB}$
$A\widehat{D}B$ زاوية محيطية تحصر $\overset{\frown}{AB}$
$A\widehat{O}B$ زاوية مركزية تحصر $\overset{\frown}{AB}$
فإن $x\widehat{AB} = A\widehat{D}B = \frac{1}{2}A\widehat{O}B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

تمرين:
A و B و C و M تنتمي إلى دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O
$\overset{\frown}{AOB} = 84°$ و $\overset{\frown}{BMC} = 31°$
احسب قياسات زوايا المثلث ABC



الحل:

1) $\overset{\frown}{ACB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AOB} = \frac{1}{2} \times 84° = 42°$
$\overset{\frown}{AB}$ محيطية و مركزية تشتركتان بالقوس

2) $\overset{\frown}{BMC} = \overset{\frown}{BAC} = 31°$
$\overset{\frown}{BC}$ زاويتان محيطيتان مشتركتان بالقوس

3) إن مجموع قياسات زوايا مثلث $180°$
$\overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{BCA} + \overset{\frown}{CAB} = 180°$
$\overset{\frown}{ABC} + 42° + 31° = 180°$
إذن $\overset{\frown}{ABC} + 73° = 180°$
$\overset{\frown}{ABC} + 73° = 180° - 73° = 107°$

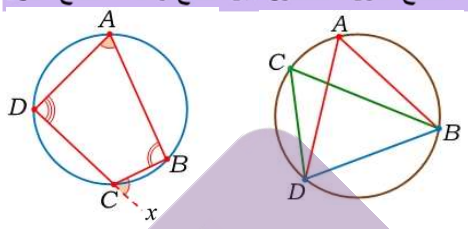
الرباعي الدائري

هو شكل رباعي تقع رؤوسه على محيط دائرة واحدة

مجموع قياسات زوايا أي مضلع رباعي 360°.

الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسيهما 180°

الزاوية الخارجية لمضلع تكون محصورة بين ضلع وامتداد ضلع أخرى



خواص

الزاويتان المتقابلتان في رباعي دائري متكاملتان.

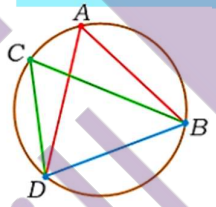
$ABCD$ رباعي دائري فإن $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$

الزاوية الخارجية في رباعي دائري تساوي الزاوية المقابلة لمجاورتها

$ABCD$ رباعي دائري فإن $B\widehat{C}x = \widehat{A}$

إذا كانت النقاط A و B و C و D واقعة على دائرة واحدة وكانت النقطتان A و C في جهة واحدة بالنسبة إلى (BD)، كانت الزاويتان $\widehat{BAD}$ و $\widehat{BCD}$ متساويتين.

$ABCD$ رباعي دائري فإن $\widehat{C} = \widehat{A}$



نقبل بصحة العكس:

إذا تساوت الزاويتان $\widehat{BAC}$ و $\widehat{BCD}$، وكانت النقطتان A و C في جهة واحدة بالنسبة للمستقيم (BD)، كان الرباعي $ABDC$ دائرياً.

$ABCD$ رباعي فيه $\widehat{C} = \widehat{A}$ وتقعان في جهة واحدة بالنسبة إلى BD فهو رباعي دائري

إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في شكل رباعي، كان الرباعي دائرياً.

$ABCD$ رباعي فيه $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^0$ فهو رباعي دائري

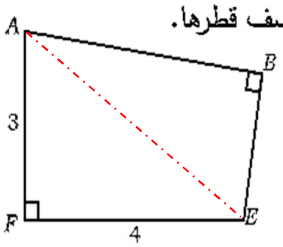
مثال

في الشّكل المرسوم جانباً لدينا رُباعي $ABEF$ فيه

$\widehat{B} = \widehat{F} = 90^\circ$ و $FE = 4$ و $AF = 3$

①أثبت أنّ النّقاط A, B, E, F تقعُ على دائرةٍ واحدةٍ.

②عيّن مركز هذه الدائرة وطول نصف قطرها.



الحل: $ABEF$ رباعي فيه

$\widehat{B} + \widehat{F} = 90 + 90 = 180^0$

فهو رباعي دائري لتكامل زاويتين متقابلتين فيه

مركز الدائرة المارة برؤوسه منتصف AE

الوتر المشترك للمثلثين القائمين AFE, ABE

حسب فيثاغورث نجد $AE = 5$ ومنه $R = \frac{5}{2}$

المضلعات المنتظمة

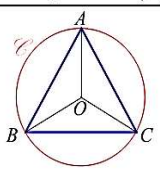
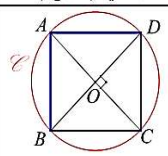
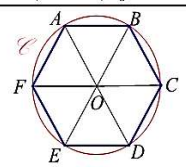
تعريف المضلع المنتظم هو مضلع قياسات زواياه متساوية وأطوال أضلاعه متساوية

خواص

1. كل مضلع منتظم قابل للارتسام في دائرة (بمعنى وجود دائرة مارة برؤوسه) يسمى مركزها مركز المضلع المنتظم

2. إذا كان $[AB]$ ضلعاً في مضلع منتظم مركزه O وعدد أضلاعه n، كان $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{n}$

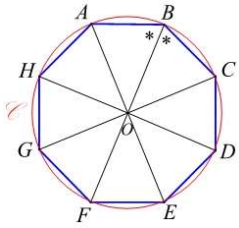
3. طول ضلع المسدس المنتظم يساوي نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

ثلاثي (مثلث متساوي الأضلاع)	رباعي (مربع)	سداسي (مسدس)
		
ABC مثلث متساوي الأضلاع	$ABCD$ مربع	$ABCDEF$ مسدس
$\widehat{ABC} = 60^\circ$ $\widehat{AOB} = 120^\circ$	$\widehat{ABC} = 90^\circ$ $\widehat{AOB} = 90^\circ$	$\widehat{ABC} = 120^\circ$ $\widehat{AOB} = 60^\circ$

كيف نحسب زاوية مضلع منتظم ؟

$ABCDEFGH$ مثمن منتظم مرسوم في دائرة مركزها O. ما قياس الزاوية $\widehat{ABC}$

احسب قياس $\widehat{ABC}$



الحل:

نعلم أن $\widehat{AOB} = \frac{360}{n}$

إذن $n = 8$، $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

في المثلث المتساوي الساقين OAB نجد $\widehat{ABO} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67.5^\circ$

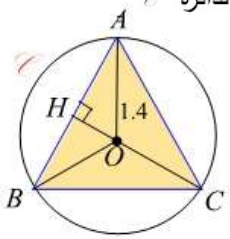
بنفس الطريقة نجد في المثلث OBC أنّ $\widehat{CBO} = 67.5^\circ$

إذاً: $\widehat{ABC} = 67.5^\circ + 67.5^\circ = 135^\circ$

كيف نحسب طول ضلع مضلع منتظم

مثال ABC مثلث متساوي الأضلاع مرسوم في دائرة مركزها O ونصف قطرها $OA = OB = OC = 1.4$ cm. احسب الطول AB

الحل: $[OA]$ و $[OB]$ هما نصفا قطرين في الدائرة



نرسم ارتفاع هذا المثلث من O

لدينا (OA) محور في المثلث ABC

فهو منصف للزاوية $\widehat{CAB}$ إذن $\widehat{OAH} = 30^\circ$

في المثلث OAH

$\cos 30^\circ = \frac{AH}{1.4}$ أي $\cos \widehat{OAH} = \frac{AH}{AO}$

ومنها $AH = 1.4 \times \cos 30^\circ$

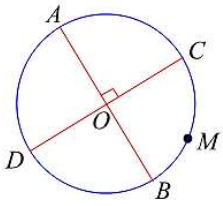
ويكون (OH) محور القطعة $[AB]$

إذن $AB = 2\,AH$. نستنتج أنّ

$AB = 2 \times 1.4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.4\sqrt{3}$

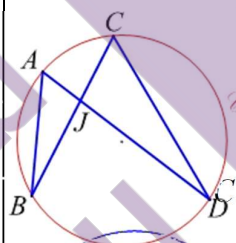
تمارين على وحدة الدائرة

1) $[AB]$ و $[CD]$ قطران متعامدان في دائرة مركزها O
M نقطة من القوس الصغرى $\overset{\frown}{BC}$ احسب قياس كلٍ من:
① $\overset{\frown}{AMB}$ ② $\overset{\frown}{AMC}$ ③ $\overset{\frown}{BMC}$



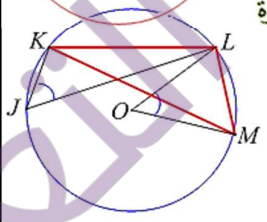
الحل: $A\hat{M}B = 90^\circ$
محيطية تحصر قوس نصف الدائرة
$A\hat{M}C = \frac{1}{2}A\hat{O}C = 45^\circ$
محيطية ومركزية تشتركان بالقوس $\overset{\frown}{AC}$
$B\hat{M}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CADB} = \frac{1}{2}\times 270^\circ = 135^\circ$
محيطية تحصر القوس $\overset{\frown}{CADB}$

2) A و B و C و D نقاط من دائرة $\mathscr{C}$. نعلم أنّ $\overset{\frown}{ABC} = 22^\circ$. $\overset{\frown}{BAD} = 58^\circ$
الوتران $[AD]$ و $[BC]$ متقاطعان في J
احسب قياس كلّ من: ① $\overset{\frown}{BCD}$ ② $\overset{\frown}{CDA}$ ③ $\overset{\frown}{CJD}$



الحل: $B\hat{C}D = B\hat{A}D = 58^\circ$
محيطيتان تحصران القوس $\overset{\frown}{DB}$
$C\hat{D}A = C\hat{B}A = 22^\circ$
محيطيتان تحصران القوس $\overset{\frown}{DB}$
$C\hat{J}D = 180^\circ - \left(C\hat{D}A + B\hat{C}D\right)$
$C\hat{J}D = 180^\circ - \left(58^\circ + 22^\circ\right) = 100^\circ$

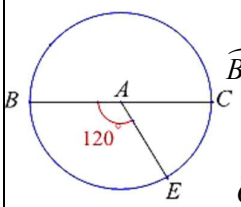
3) J و K و L و M نقاط من دائرة



$\overset{\frown}{KJL} = \overset{\frown}{LOM} = 52^\circ$
حسب قياسات زوايا المثلث LMK
الحل: $L\hat{M}K = L\hat{J}K = 52^\circ$
محيطيتان تحصران القوس $\overset{\frown}{LK}$
$L\hat{K}M = \frac{1}{2}L\hat{O}M = 26^\circ$
محيطية ومركزية تحصران $\overset{\frown}{LM}$
$K\hat{L}M = 180^\circ - \left(L\hat{M}K + L\hat{K}M\right)$
$K\hat{L}M = 180^\circ - 78^\circ = 102^\circ$

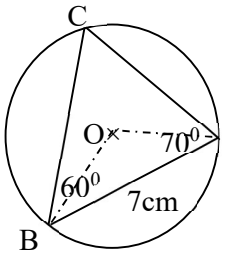
4) $[BC]$ قطر في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها A . E نقطة من هذه الدائرة تُحقّق $\overset{\frown}{BAE} = 120^\circ$. احسب قياسات الزوايا الآتية:
① $\overset{\frown}{CAE}$ ② $\overset{\frown}{ECB}$ ③ $\overset{\frown}{CBE}$

الحل (1) $C\hat{A}E = 180 - 120 = 60^0$
$E\hat{C}B = \frac{1}{2}E\hat{A}B = 60^0$
محيطية ومركزية تشتركان بالقوس $\overset{\frown}{BE}$
$C\hat{B}E = \frac{1}{2}C\hat{A}E = 30^\circ$



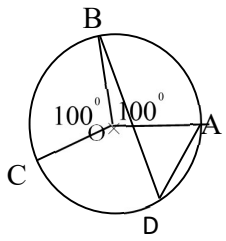
محيطية ومركزية تحصران القوس $\overset{\frown}{CE}$

5) $[AB]$ قطعة مستقيمة طولها 7 cm .
ارسم $[AB]$ وارسم نقطة C بحيث تحصل على $\overset{\frown}{BAC} = 70^\circ$ و $\overset{\frown}{ABC} = 60^\circ$. ثم ارسم الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC . ارمز إلى مركزها بالرمز O
احسب قياس الزاوية $\overset{\frown}{AOB}$.



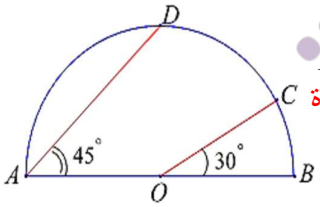
الحل:
$A\hat{C}B = 180^\circ - \left(C\hat{B}A + C\hat{A}B\right)$
$A\hat{C}B = 180^\circ - \left(70^\circ + 60^\circ\right) = 50^\circ$
$A\hat{O}B = 2A\hat{C}B = 100^\circ$
مركزية و محيطية تحصران $\overset{\frown}{AB}$

6) **1.** وضّع النقاط A و B و C، بهذا الترتيب،
على $\mathscr{C}$ بحيث يكون $\overset{\frown}{AOB} = \overset{\frown}{BOC} = 100^\circ$
ثم وضّع نقطة D على القوس $\overset{\frown}{AC}$ التي لا تضم B .
2. احسب قياس الزاوية $\overset{\frown}{ADB}$.
3. أثبت أنّ نصف المستقيم $[DB)$ منصف للزاوية $\overset{\frown}{ADC}$



الحل: 1. الشكل
2. $A\hat{D}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B = 50^\circ$
محيطية ومركزية تحصران $\overset{\frown}{AB}$
3. $C\hat{D}B = \frac{1}{2}C\hat{O}B = 50^\circ$
محيطية ومركزية تحصران $\overset{\frown}{CB}$
إذا: $A\hat{D}B = C\hat{D}B = 50^\circ$
فإن DB منصف للزاوية $A\hat{D}C$

7) C و D نقطتان من نصف دائرة مركزها O
وقطرها $[AB]$ تحقّقان $\overset{\frown}{BOC} = 30^\circ$ و $\overset{\frown}{BAD} = 45^\circ$
1. ما طبيعة المثلث ADB ؟ اشرح إجابتك.
2. ما طبيعة المثلث COD ؟ اشرح إجابتك.



الحل: 1. المثلث ADB قائم في D
لأن ضلعه AB قطر الدائرة المارة برؤوسه وفيه $D\hat{A}B = 45^\circ$
فهو متساوي الساقين
2. المثلث AOD متساوي الساقين في O
وفيه $\overset{\frown}{OAD} = 45^\circ$
فإن $\overset{\frown}{DOA} = 90^\circ$
ومنه فإن $\overset{\frown}{DOC} = 180^\circ - \left(\overset{\frown}{DOA} + \overset{\frown}{COB}\right)$
فيكون $\overset{\frown}{DOC} = 60^\circ$
فالمثلث COD متساوي الأضلاع

لأنه متساوي الساقين في O وإحدى زواياه 60°

8) $MNPQ$ مربع. و $ABCDEFGH$ مثمن

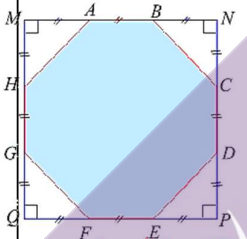
1. هل هذا المثمن منتظم؟ اشرح.
2. $\mathcal{A}$ هي مساحة المربع $MNPQ$

و $\mathcal{A}'$ مساحة المثمن اشرح لماذا $\mathcal{A}' = \frac{7}{9}\mathcal{A}$ ؟

الحل: 1.المثلثات لأربعة قائمة وطبوقة

فيكون $BC = DE = FG = HA$ بحسب(ضلع،زاوية،ضلع)

لكن $BC \neq CD$ لأن الوتر أطول أضلاع المثلث القائم فهو ليس مثمن منتظم



2.نفرض $AB = x$

مساحة المربع $\mathcal{A} : 3x \times 3x = \boxed{9x^2}$

مساحة أي مثلث هو $\frac{x \times x}{2} = \boxed{\frac{x^2}{2}}$

فإن مساحة المثلثات الأربعة = $2x^2$

مساحة المثمن= مساحة المربع – مساحة المثلثات الأربعة

$\mathcal{A}' = 9x^2 - 2x^2 = 7x^2$

$\mathcal{A}' = \frac{7}{9}\mathcal{A}$ ومنه $\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = \frac{7}{9}$ ومنه $\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = \frac{7x^2}{9x^2}$

9) A و B و C و D أربع نقاط من دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O.

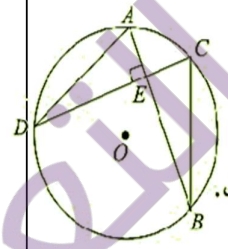
الوتران $[AB]$ و $[CD]$ متعامدان في E . $\widehat{BCD} = 69^\circ$

1. احسب قياس الزاوية $\widehat{ADC}$.
2. ① ارسم المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث EBC

ولتكن F نقطة تلاقيه مع $[BC]$

② ما طبيعة المثلث EFC ؟ تحقق من إجابتك.

③ استنتج قياس الزاوية $\widehat{CEF}$.



3. يقطع المستقيمُ (EF) القطعة المستقيمة $[AD]$ في النقطة H

① ما قياس الزاوية $\widehat{DEH}$ ؟ لماذا؟

② استنتج قياس الزاوية $\widehat{DHE}$ في المثلث DEH .

③ استنتج أيضاً دور المستقيم (EH) في المثلث ADE .

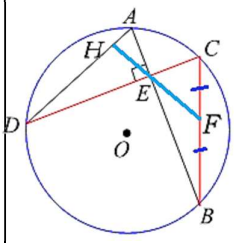
الحل:1. المثلث EBC قائم في E

فيه $B\widehat{C}D = 69^\circ$ فإن $C\widehat{B}A = 21^\circ$

$A\widehat{D}C = C\widehat{B}A = 21^\circ$

محيطيتان تحصران القوس $\overset{\frown}{AC}$

(1).2: الرسم



(2) EF متوسط متعلق بالوتر BC فإن $EF = \frac{1}{2}BC$

فهو متساوي الساقين في F لأن $EF = FC$

(3) $C\widehat{E}F = F\widehat{C}E = 69^\circ$

(1).3 $D\widehat{E}H = C\widehat{E}F = 69^\circ$

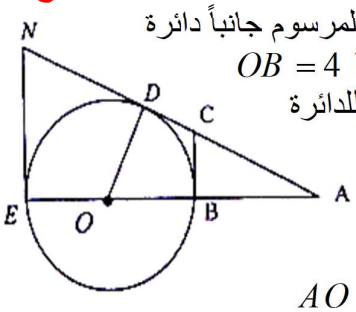
(2) في المثلث DEH نجد

$D\widehat{H}E = 180 - \left(H\widehat{D}E + H\widehat{E}D\right)$

ومنه $D\widehat{H}E = 90^\circ$

(3) بما أن $D\widehat{H}E = 90^\circ$ فإن $EH \perp DA$ فهو ارتفاع

المسألة الاولى : في الشكل المرسوم جانباً دائرة مركزها O ونصف قطرها $OB = 4$



BC ,NA ,EN مماسات للدائرة في النقاط B ,D ,E

وقياس الزاوية $\widehat{A} = 30^\circ$

1)أثبت أن $D\widehat{O}B = 60^\circ$ ،

واستنتج أن B منتصف AO

2) أثبت أن النقاط B ,C ,D ,O تقع على دائرة واحدة

3)أثبت أن $AD = 4\sqrt{3}$.

4) احسب $\cos\widehat{A}$ واستنتج $2EA = \sqrt{3}AN$.

الحل: 1) AD مماس للدائرة في النقطة D

فإن $AD \perp DO$ فالمثلث ADO قائم في D

و $\widehat{A} = 30^\circ$ فإن $D\widehat{O}B = 60^\circ$

فإن $OD = \frac{1}{2}OA$ لأنه يقابل زاوية 30°

لكن $OD = OB = R$ فإن $OB = \frac{1}{2}OA$

ومنه B منتصف AO

2): CB مماس للدائرة في النقطة B

فإن $CB \perp BO$ فالمثلث CBO قائم في B

$C\widehat{B}O = 90^\circ$,$C\widehat{D}O = 90^\circ$ وهما زاويتان متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي $ODCB$ فهو دائري

مركز الدائرة المارة برؤوسه منتصف OC

الوتر المشترك للمثلثين القائمين CBO ,ADO

3): حسب فيثاغورث في المثلث ADO

$AO^2 = AD^2 + DO^2$

نعوض $8^2 = AD^2 + 4^2$

ومنه $AD = \boxed{4\sqrt{3}}$

4): EN مماس للدائرة في النقطة E

فإن $EN \perp EO$

فالمثلث NEA قائم في E

$\cos\widehat{A} = \frac{EA}{NA}$ (1)

ولدينا (2) $\cos\widehat{A} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

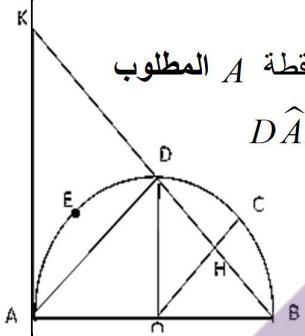
من (1) و(2) نجد: $\frac{EA}{NA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه : $2EA = \sqrt{3}NA$

المسألة الثانية : في الشكل المجاور نصف دائرة مركزها O وقطرها AB
النقاط $E.D.C$ تحقق

$$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{ED}=\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{CB}$$

وليكن AK مماس للدائرة في النقطة A **المطلوب**



1.أوجد قياس الزاويتين $D\hat{A}B.C\hat{O}B$
واستنتج $OC \parallel AD$
2. إذا كان المثلث OHB تصغير للمثلث ADB اكتب النسب الثلاث
واستنتج معامل التصغير
3.أثبت أن $DO \perp AB$
واستنتج أن المثلث DOB تصغير للمثلث KAB
4.أثبت صحة العلاقة $(DB)^2 = BH \times BK$

الحل:1) لدينا $\overset{\frown}{AB}=180^\circ$ لأنه نصف دائرة ومنه

$$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{ED}=\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{CB}=\frac{180^\circ}{4}=45^\circ$$

$\overset{\frown}{DB}$ محيطية تحصر $D\hat{A}B=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DB}=\frac{1}{2}\times 90=45^\circ$

$C\hat{O}B=\overset{\frown}{CB}=45^\circ$ مركزية تحصر القوس $\overset{\frown}{CB}$

ومنه نجد $C\hat{O}B=D\hat{A}B$
وهما في وضع التناظر فيكون $OC \parallel AD$

2):بما أن $OC \parallel AD$ فحسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{BH}{BD}=\frac{BO}{BA}=\frac{OH}{AD}$$

فالمثلثين OHB ، ADB متشابهين

المثلث OHB تصغير لـ ADB والمعامل $\frac{BO}{BA}=\frac{1}{2}$

3)a: المثلث ADB قائم الزاوية في D لأن $A\hat{D}B=90^\circ$
زاوية محيطية تحصر قوس نصف دائرة

وفيه $D\hat{A}B=45^\circ$ فإن $D\hat{B}A=45^\circ$ هو متساوي الساقين
وفيه DO متوسط متعلق بالقاعدة فهو ارتفاع
ومنه $AB \perp DO$
b: لدينا KA مماس للدائرة فإن $AB \perp AK$
ولدينا $AB \perp DO$
فإن $OD \parallel AK$ فحسب مبرهنة النسب الثلاث

نجد $\frac{BD}{BA}=\frac{BO}{BK}=\frac{DO}{AK}$ فالمثلثين DOB ، AKB
ويكون المثلث DOB تصغير للمثلث AKB

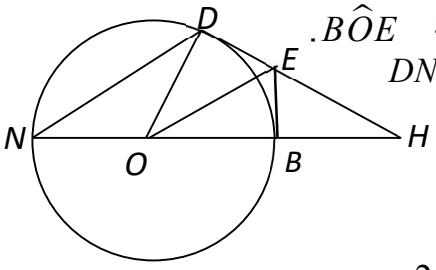
4): من الطلبين (2)و(3)نجد $\frac{BD}{BA}=\frac{BH}{BD}$
فحسب خاصة الضرب التقاطعي نجد

$$(DB)^2 = BH \times BK$$

المسألة الثالثة : C دائرة مركزها O
و $[NB]$ قطر فيها و D نقطة من الدائرة بحيث

$\overset{\frown}{ND}=\frac{2}{3}\overset{\frown}{NB}$ و (BE) , (DH) مماسان
للدائرة في النقطة B و D على التوالي **والمطلوب**

1. أثبت أن قياس القوس $\overset{\frown}{DB}=60^\circ$.
2. احسب قياسات زوايا المثلث HOD
واستنتج أن $OB=\frac{1}{2}OH$.
3. أثبت أن الرباعي $ODEB$ رباعي دائري, واستنتج قياس الزاوية $B\hat{E}D$.
4. أثبت أن المثلث OEH متساوي الساقين,
واحسب قياس الزاوية $B\hat{O}E$.
5. أثبت أن $DN \parallel OE$



الحل:

1) لدينا $\overset{\frown}{NB}=180^\circ$

$$\overset{\frown}{ND}=\frac{2}{3}\times 180^\circ=\boxed{120^\circ}$$

ومنه: $\overset{\frown}{DB}=180^\circ-120^\circ=\boxed{60^\circ}$

2): DH مماس للدائرة في النقطة D فإن $DH \perp DO$
لأن المماس عمود على نصف القطر في نقطة التماس فالمثلث HDO قائم في D وفيه $H\hat{O}D=\overset{\frown}{DB}=60^\circ$ زاوية مركزية تحصر $\overset{\frown}{DB}$ فإن $D\hat{H}O=30^\circ$ ومنه $OD=\frac{1}{2}OH$

لأنه يقابل زاوية 30° في مثلث قائم
لكن $OD=OB=R$ فإن $OB=\frac{1}{2}OH$

3): EB مماس للدائرة في النقطة B
فإن $EB \perp BO$ فالمثلث EBO قائم في B
إذاً: $H\hat{D}O=90^\circ$, $E\hat{B}O=90^\circ$
هما زاويتان متقابلتان ومتكاملتان فالرباعي $ODEB$ دائري
إذاً $B\hat{E}D$ تكمل $B\hat{O}D$ متقابلتان في الرباعي الدائري
وبما أن $B\hat{O}D=60^\circ$
فإن: $B\hat{E}D=120^\circ$ متقابلتان في رباعي دائري

4): لدينا $OB=\frac{1}{2}OH$ فإن B منتصف OH
EB متوسط وارتفاع معا فالمثلث OEH متساوي الساقين
وفيه $D\hat{H}O=30^\circ$ فإن : $E\hat{O}B=30^\circ$

5): لدينا $D\hat{N}B=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DB}=30^\circ$ زاوية محيطية تحصر $\overset{\frown}{DB}$
إذاً: $D\hat{N}B=E\hat{O}B=30^\circ$
وهما في وضع التناظر بالنسبة فإن $DN \parallel OE$

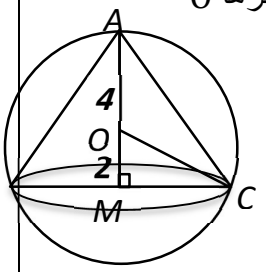
محيطات ومساحات بعض المضلعات

الشكل الهندسي	المحيط: P المساحة: S
المثلث	مجموع أطوال أضلاعه P= $S=\frac{B\times h}{2}$ (B القاعدة, h الارتفاع)
المثلث القائم	مجموع أطوال أضلاعه P= $S=\frac{L_1,L_2}{2}$ (L_1,L_2 الضلعين القائمتين)
المثلث المتساوي الاضلاع	طول الضلع ×3 =P $h=\frac{a\times\sqrt{3}}{2}$ $S=\frac{a^2\times\sqrt{3}}{4}$
متوازي الأضلاع	مجموع أطوال أضلاعه P= أو (مجموع ضلعين متجاورين×2) $S=B\times h$ (B القاعدة, h الارتفاع)
المستطيل	$P=(L+W)\times 2$ (L الطول، W العرض) $S=L\times W$
المربع	$p=4\times a$ (حيث a طول الضلع) $S=(a)^2$
المعين	$p=4\times a$ (حيث a طول الضلع) $S=\frac{L_1\times L_2}{2}$ (L_1,L_2 الضلعين القائمتين)
الدائرة	$P=2\pi R$ (حيث R نصف طول القطر) $S=\pi R^2$
شبه المنحرف	مجموع أطوال أضلاعه P= $S=\frac{(a+b)\times h}{2}$ (a,b طولا القاعدتين و h الارتفاع)

حجوم ومساحات المجسمات

اسم المجسم	خواصه	مساحات وحجوم
المكعب	له ستة أوجه كلها مربعات طبوقة a طول حرفه S_L مساحة جانبية S_T مساحة كلية V الحجم	$S_L=4a^2$ $S_T=6a^2$ $V=a^3$
متوازي المستطيلات	وجوهه مستطيلات كل وجهين متقابلين طبوقين أبعاده x,y,z S_L مساحة جانبية S_T مساحة كلية V الحجم	$S_L=P\times h$ $S_T=2xy+2xz+2yz$ $V=x\times y\times z$ P محيط القاعدة h الارتفاع
الاسطوانة الدورانية	تنتج بدوران مستطيل حول احد اضلاعه دورة كاملة S_L مساحة جانبية V الحجم	$S_L=P\times h$ $S_L=2\pi R\times h$ $V=S\times h$ $V=\pi R^2\times h$ P محيط القاعدة h الارتفاع
المخروط	ينتج بدوران مثلث قائم حول أحد الضلعين القائمين دورة كاملة قاعدته دائرة S_L مساحة جانبية V الحجم	$S_L=\pi R\times L$ $V=\frac{1}{3}S_B\times h$ $V=\frac{1}{3}\pi R^2\times h$ L العامد(المولد) h الارتفاع
الهرم المنتظم	قاعدته مضلع منتظم وارتفاعه هو العمود النازل من الرأس على مركز القاعدة ويسمى بحسب عدد اضلاع قاعدته	$V=\frac{1}{3}S\times h$ S مساحة القاعدة h الارتفاع
الكرة	تنتج بدوران دائرة حول احد اقطارها نصف دورة تعريفها: هي مجموعة نقط الفراغ M التي تبعد عن نقطة O مسافة $OM=R$	$S=4\pi R^2$ $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ S مساحة سطحها V حجمها R نصف قطرها
المجسم الكروي	تنتج بدوران قرص دائري حول احد اقطاره نصف دورة تعريفها: هي مجموعة نقط الفراغ M التي تبعد عن نقطة O مسافة $OM\le R$ وله ذات قوانين الكرة	

تمرين1: في الشكل المجاور كرة مركزها O
ونصف قطرها $OA = 4$
بداخلها مخروط دوراني رأسه A
وقاعدته دائرة مركزها M تبعد عن
مركز الكرة مسافة $OM = 2$



والمطلوب :
1)احسب كلاً من : MC و AC .
2)احسب $\sin O\hat{C}M$ واستنتج قياس الزاوية $O\hat{C}M$.
3) احسب حجم المخروط.

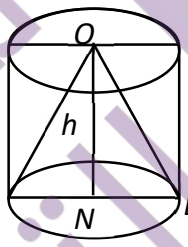
الحل: 1) لاحظ أن $OC = R = 4$
حسب فيثاغورث في OMC نجد $MC = 2\sqrt{3}$
حسب فيثاغورث في AMC نجد $AC = 4\sqrt{3}$

2) $\sin\left(O\hat{C}M\right) = \frac{OM}{OC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ومنه $O\hat{C}M = 30^\circ$

3) $V = \frac{\pi}{3}R^2h$ ومنه $V = \frac{\pi}{3}\left(2\sqrt{3}\right)^2 \times 6$

$V = \frac{\pi}{\cancel{3}}\cancel{12}^{4} \times 6$ ومنه $V = 24\pi cm^3$

تمرين2: في الشكل: اسطوانة دورانية ارتفاعها $h = ON$
ونصف قطر قاعدتها $r = NB = 2\sqrt{3}$
ومخروط دوراني رأسه O
يشترك معها في القاعدة
وحجمه $V = 40\pi$ **المطلوب**



1)أثبت أن ارتفاع الأسطوانة $h = 10$
2)واحسب حجمها V' .
2)احسب حجم الجزء المحصور بين الأسطوانة والمخروط

الحل: 1)حجم المخروط $V = \frac{\pi}{3}r^2h$

نعوض: $40\pi = \frac{\pi}{3}\left(2\sqrt{3}\right)^2 h$

$40\pi = \frac{\pi}{\cancel{3}} \times \cancel{12}^{4} \times h$

ومنه $40\pi = 4\pi h$

ومنه $h = \boxed{10}$

حجم الاسطوانة: $V' = \pi r^2 h$

نعوض: $V' = \pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 \times 10$

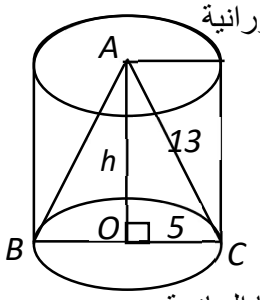
ومنه $V' = \boxed{120\pi}$

2): حجم الجزء المحصور بين الأسطوانة والمخروط
$V_1 = V' - V$

ومنه $V_1 = 120\pi - 40\pi$

ومنه $V_1 = \boxed{80\pi}$

تمرين3: في الشكل جانباً أسطوانة دورانية
وضع بداخلها مخروط طول
مولده $AC = 13\ cm$
ونصف قطر قاعدتيهما المشتركة
$OC = R = 5\ cm$.



1) احسب الارتفاع AO .
2) احسب مساحة القاعدة.
3) احسب حجم الأسطوانة ومساحتها الجانبية

الحل: 1) حسب فيثاغورث في المثلث AOC
$AC^2 = AO^2 + OC^2$ ومنه $169 = AO^2 + 25$
ومنه $AO^2 = 144$ وبالجذر نجد : $AO = \boxed{12}$

2): $S = \pi R^2 = 25\pi\ cm^2$

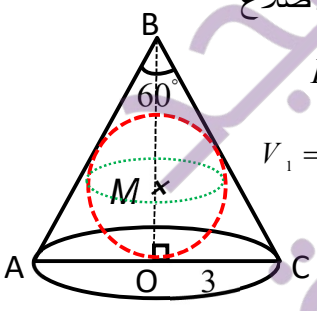
3): $V = \pi R^2 h$ نعوض: $V = \pi(5)^2 \times 12 =$

ومنه $V = \boxed{300\pi} cm^3$

المساحة الجانبية للأسطوانة: $S = 2\pi Rh$
نعوض $S = 2\pi(5) \times 12$
ومنه $S = \boxed{120\pi} cm^2$

تمرين4: في الشكل المجاور مخروط دوراني رأسه B،
وطول نصف قطر قاعدته $OC = 3$،
وليكن قياس زاوية رأسه $A\hat{B}C = 60^\circ$. **المطلوب:**
1) ما طبيعة المثلث ABC، واحسب ارتفاع المخروط
2) وضعت كرة داخل المخروط مركزها مركز المثلث ABC وتمس الضلع AC. **المطلوب:**
a) احسب V_1 حجم المخروط. و V_2 حجم الكرة.
b) أثبت أن V حجم الجزء المحصور بين المخروط والكرة يساوي $V = 5\sqrt{3}\pi\ cm^3$

الحل: 1)المثلث ABC متساوي الساقين
فيه $\hat{A} = 60^\circ$ فهو متساوي الاضلاع



فيكون $BO = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

2) حجم المخروط $V_1 = \frac{\pi}{3}R^2h$

$V_1 = \frac{\pi}{\cancel{3}}(3)^2 \times \left(\cancel{3}\sqrt{3}\right)$

$V_1 = 9\sqrt{3}\pi\ cm^3$

حسب خاصة مركز الثقل نجد $OM = \frac{1}{3}OB = \sqrt{3}$

حجم الكرة $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$ نعوض $V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^3$

ومنه $V_2 = 4\sqrt{3}\pi\ cm^3$

حجم الفراغ= حجم المخروط – حجم الكرة

حجم الفراغ $V = 9\sqrt{3}\pi - 4\sqrt{3}\pi = \boxed{5\sqrt{3}\pi} cm^3$