ورقة عمل لمادة الهندسة

[1] $A(1,1,1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(1,0,-1)$ و $E(3,2,1)$

a) هل C,D,B تحدد مستوٍ أو اثبت أنها لا تقع على استقامة واحدة.

b) اثبت أن النقاط A,D,B,C تشكل رباعي وجوه.

c) جد معادلة للمستوي (BDC).

d) اثبت أن المثلث DBC قائم في D.

e) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من A والذي يعامد للمستوي (BDC).

f) استنتج المسقط القائم لـ A على المستوي (BDC).

g) جد بُعد A عن (DCB).

h) استنتج حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

i) أثبت أن E مركز ابعاد متناسبة للنقاط $(B,\alpha),(C,\beta),(D,\gamma)$ عين أثقالها. ثم استنتج أن E تقع في المستوي (BDC).

j) جدْ على محور التراتيب نقطة K تقع على المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

k) جد معادلة الكرة التي قطرها $[ED]$.

l) جد تمثيل وسيطي للقطر $[ED]$.

m) جد معادلة المستوي الذي يمس الكرة السابقة في E.

n) جد احداثيات M مركز ابعاد النقاط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$.

o) جد مسقط E' على المستقيم (AB). ثم احسب بُعد E عن (AB).

p) جد معادلة المجموعة M تحقق: $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=0$ وما طبيعتها.

الحل:

a) نشكل شعاعين من النقط الثلاث وندرس الارتباط الخطي بينهما

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{BC}(1,-1,5)\\ \overrightarrow{BD}(-1,-2,-4)\end{matrix}\right\}\ \frac{1}{-1}\neq\frac{-1}{-2}$$

المركبات غير متناسبة فالأشعة غير مرتبطة خطياً فالنقط لا تقع على استقامة واحدة فهي تحدد مستو.

b) حتى يكون $ABCD$ رباعي وجوه يجب أن يتحقق :

1) B,C,D ليست على استقامة واحدة وهذا محقق من الطلب الأول .

2) A لا تنتمي للمستوي (BCD) لذلك ندرس الارتباط الخطي للأشعة

$$\overrightarrow{BA}=a\overrightarrow{BC}+b\overrightarrow{BD}$$

بالمقارنة نجد :

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}-1=a-b & (1)\\ -1=-a-2b & (2)\\ -2+-5a-4b & (3)\end{matrix}$$

من (1) و (2): $a=\frac{-1}{3}$ و $b=\frac{2}{3}$ ثمّ نتحقق في (3):

$$-2\overset{?}{=}-5\left(\frac{-1}{3}\right)-4\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$-2\overset{?}{=}\frac{5}{3}-\frac{8}{3}$$

$$-2\neq-1$$

ومنه الأشعة : $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}$ غير مرتبطة خطياً فالنقط A,B,C,D لا تقع في مستوي واحد ومنه $A\notin(BCD)$ أي النقط : A,D,B,C تشكل رباعي وجوه .

c) نقطة منه $D(1,0,-1)$ و ناظمه $\vec{n}(a,b,c)$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{BC}\leftrightarrow\vec{n}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow a-b-5c=0$$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{BD}\leftrightarrow\vec{n}.\overrightarrow{BD}=0\Rightarrow -a-2b-4c=0$$

بفرض : $c=1$ $\Leftarrow$ $\begin{matrix}a-b=5 & (1)\\ -a-2b=4 & (2)\end{matrix}$ بالحل المشترك

نجد: $a=2$, $b=-3$ $\Leftarrow$ $\vec{n}(2,-3,1)$ وبالتالي معادلة المستوي :

$$(BCD):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$(BCD):2(x-1)-3(y-0)+1(z+1)=0$$

$$\boxed{(BCD):2x-3y+z-1=0}$$

d) $BD=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}, BC=\sqrt{1+1+25}=\sqrt{27}$

$$DC=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

محققة

$$(BC)^2\overset{?}{=}(BD)^2+(DC)^2$$

$$27\overset{?}{=}21+6$$

$$27=27$$

حسب عكس مبرهنة فيثاغورث المثلث DBC قائم في D .

أو نستعمل الجداء السلمي.

e) المستقيم d مار من $A(1,1,1)$ و يعامد (BDC) أي:

$$\boxed{(d):\begin{cases}x=1+2t\\ y=1-3t\\ z=t\end{cases};t\in\mathbb{R}}\ \Leftarrow\ \vec{v_d}=\vec{n}(2,-3,1)$$

f) بما أنّ d مار من A و يعامد (BDC) فإنّ مسقط A على (BDC) هو نقطة تقاطع d و (BDC) وليكن A' نوجدها بالحل المشترك :

$$2(2t+1)-3(-3t+1)+t+1-1=0$$

$$4t+2+9t-3+t=0$$

$$14t=1\ \Rightarrow\ \boxed{t=\frac{1}{14}}$$

$$x=\frac{2}{14}+1=\frac{16}{14}\ ,\ y=\frac{11}{14}\ ,\ z=\frac{15}{14}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{A'\left(\frac{16}{14},\frac{11}{14},\frac{15}{14}\right)}$$

g) $$dist(A,DBC)=\frac{|2-3+1-1|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{\sqrt{14}}{14}$$

أو يمكن حساب AA' : $AA'=\sqrt{\frac{4+9+1}{196}}=\frac{\sqrt{14}}{14}$

h) $V=\frac{1}{3}\cdot S_b\cdot h = \frac{1}{3}\times\frac{DB\times DC}{2}\times dist(A,BCD)$

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{21}\times\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{14}}{14}=\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{7}\times\sqrt{2}}{3\times2\times14}=\frac{1}{2}$$

i) E م.أ.م لـ $(B,\alpha),(C,\beta),(D,\gamma)$ ومنه :

$$\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{BD}+b\overrightarrow{BC}$$

بالمقارنة: $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-1\\-2\\-4\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}1&=-a+b\quad(1)\\0&=-2a-b\quad(2)\\-2&=-4a-5b\quad(3)\end{aligned}$$

بالحل المشترك لـ (1),(2) نجد : $a=\frac{-1}{3}\ ,\ b=\frac{2}{3}$

نتحقق بـ (3) نجد : $-2\overset{?}{=}-4\left(\frac{-1}{3}\right)-5\left(\frac{2}{3}\right)$

$$-2\overset{?}{=}\frac{4}{3}-\frac{10}{3}$$

$-2=-2$ محققة

$$\Rightarrow\quad \overrightarrow{BE}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

ومنه E م.أ.م لـ $(B,2),(D,-1),(C,2)$ فالنقاط E,C,D,B تقع في مستو واحد وبالتالي : $E\in(BCD)$

j) بفرض $K(0,y,0)$ $\Leftarrow$ $KA = KB$

$$\sqrt{1+(y-1)^2+1}=\sqrt{4+(y-2)^2+9}$$

$$2+y^2-2y+1=13+y^2-4y+4$$

$$2y=14\ \Rightarrow\ \boxed{y=7}\ \rightarrow\ \boxed{K(0,7,0)}$$

k) الكرة مركزها منتصف $[ED]$ وليكن: $I(2,1,0)$ ونصف قطرها

$$R=\frac{ED}{2}=\frac{\sqrt{4+4+4}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{2}$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

$$\boxed{(x-2)^2+(y-1)^2+(z)^2=3}$$

l) النقطة هي $E(3,2,1)$ وشعاع الموجه : $\overrightarrow{ED}(-2,-2,-2)$

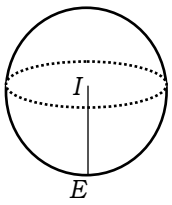
$$\boxed{[ED]:\begin{cases}x=-2t+3\\y=-2t+2\\z=-2t+1\end{cases};t\in[0,1]}$$

m) نقطة منه $E(3,2,1)$ ناظمه $\overrightarrow{EI}(-1,-1,-1)$

$$(P):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$(P):-1(x-3)-1(y-2)-1(z-1)=0$$

$$\boxed{(P):x+y+z-6=0}$$



n) $M=\frac{\alpha A+\beta B+\gamma C}{\alpha+\beta+\gamma}$ أي

$$M=\frac{1(1,1,1)+2(2,2,3)+3(3,1,-2)}{1+2+3}\Rightarrow\boxed{M\left(\frac{14}{6},\frac{8}{6},\frac{1}{6}\right)}$$

o) أولاً : نوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) : نقطة $A(1,1,1)$ والشعاع الموجه $\overrightarrow{AB}(1,1,2)$ $\Leftarrow$

$$\boxed{(AB):\begin{cases}x=t+1\\y=t+1\\z=2t+1\end{cases};t\in\mathbb{R}}$$

ثانياً : نوجد معادلة المستوي w المار من E والمعامد للمستقيم (AB) أي : $\overrightarrow{n_w}=\overrightarrow{AB}(1,1,2)$ $\Leftarrow$

$$(w):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$(w):1(x-3)+1(y-2)+2(z-1)=0$$

$$\boxed{(w):x+y+2z-7=0}$$

ثالثاً : بما أنّ w مار من E ويعامد المستقيم (AB) فإنّ مسقط E على (AB) هو E' نقطة تقاطع المستوي (w) والمستقيم (AB) :

$$t+1+t+1+2(2t+1)-7=0$$

$$\Rightarrow\quad 6t=3\ \Rightarrow\ \boxed{t=\frac{1}{2}}\ \rightarrow\ \boxed{E'\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},2\right)}$$

إنّ بعد E عن (AB) هو بعد E عن مسقطها القائم E'

$$\Rightarrow\ EE'=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+\frac{4}{4}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

p) $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=0$

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=0$$

$$\begin{pmatrix}x-2\\y-2\\z-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-3\\y-1\\z+2\end{pmatrix}=0$$

$$(x-2)(x-3)+(y-2)(y-1)+(z-3)(z+2)=0$$

$$x^2-5x+6+y^2-3y+2+z^2-z-6=0$$

$$x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+y^2-3y+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+z^2-z+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2=0$$

$$\boxed{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{27}{4}}$$

مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها $\Omega\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{27}}{2}$

[2] ليكن المستقيمين d,d' :

$$d':\begin{cases}3x-y-2z=1\\x-y-z=0\end{cases},\quad d:\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=2t-1\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

a) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d'.

b) جد نقطتين A من d و B من d'.

c) بيّن إذا كان $d\parallel d'$ أو كان d منطبقاً على d'.

الحل:

a) $\left.\begin{matrix}\overrightarrow{n_1}(3,-1,-2)\\ \overrightarrow{n_2}(1,-1,-2)\end{matrix}\right\}\frac{3}{1}\neq\frac{-1}{-1}$ المركبات غير متناسبة فالأشعة غير مرتبطة خطياً فالمستويان متقاطعان بفصل مشترك لإيجاده نفرض $\boxed{z=t'}$

$$\Leftarrow\begin{matrix}3x-y-2t'=1 & (1)\\ x-y-t'=0 & (2)\end{matrix}$$

بالطرح والتعويض نجد :

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t'\ ,\ y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t'$$

$$\Rightarrow\boxed{(d):\begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t'\\ y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t' & t\in\mathbb{R}\\ z=t'\end{cases}}$$

b) بفرض $t=0$ $\Leftarrow$ $A(0,0,-1)$ وبفرض $t'=1$ $\Leftarrow$ $B(1,0,1)$

c) ندرس الارتباط الخطي لأشعة التوجيه :

$\vec{V}(1,-1,2)$, $\vec{V'}\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},1\right)$ نلاحظ أنّ : $\vec{V}=2\vec{V'}$

نلاحظ أنّ الأشعة مرتبطة خطياً ومنه $d\parallel d'$.

لدراسة التطابق نعوّض A بالمستقيم d' :

$$\left.\begin{matrix}0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t'\rightarrow t'=-1\\ 0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t'\rightarrow t'=1\end{matrix}\right\}$$

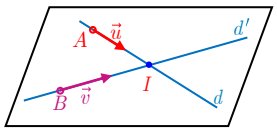
تناقض ومنه $A\notin d'$

ومنه المستقيمان غير طبوقان .

[3] لدينا $A(3,-1,1)$ و $B(3,-3,-1)$ ، والشعاعان $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$. d المستقيم المار بالنقطة A والموجَّه بالشعاع $\vec{u}$ ، و d' المستقيم المار بالنقطة B والموجَّه بالشعاع $\vec{v}$.

a) جد عددين حقيقيين a و b يحقّقان $\overrightarrow{AB}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

b) أثبت أنَّ المستقيمين d و d' متقاطعان.



c) عين I نقطة تقاطع d و d'

d) جد معادلة المستوي الذي يحوي d,d' .

الحل:

a) $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$ غير مرتبطين خطياً

$$\overrightarrow{AB}=a\vec{u}+b\vec{v}$$

$$\Leftarrow\text{بالمقارنة :}\begin{matrix}0=a+2b & (1)\\ -2=b & (2)\\ -2=-2a-3b & (3)\end{matrix}\quad\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$$

بالحل المشترك بين (1) و (2) نجد أنّ : $a=4$, $b=-2$

نتحقق في (3) : $-2\overset{?}{=}-2(4)-3(-2)$ محققة

$$-2=-2$$

$$\Leftarrow\boxed{\overrightarrow{AB}=4\vec{u}-2\vec{v}}$$

b) $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات فالمستقيمان غير متوازيان فهما اما متقاطعان او متخالفان.

لكن $\overrightarrow{AB}=4\vec{u}-2\vec{v}$ فالأشعة : $\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}$ مرتبطة خطياً فهي تقع في مستوي احد $\Leftarrow$ d و d' متقاطعان لأنهما يقعان في مستوي واحد .

c) I نقطة تقاطع d و d'

$$d:\begin{cases}x=t+3\\ y=-1\\ z=-2t+1\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}\qquad d':\begin{cases}x=2s+3\\ y=s-3\\ z=-3s-1\end{cases}\quad s\in\mathbb{R}$$

بحل (d) من $\left(d'\right)$:

$$\begin{cases}2s-3=t+3 & (1)\\ s-3=-1 & (2)\\ -3s-1=-2t+1 & (3)\end{cases}$$

من (2) : $s=2$

نعوض في (1) نجد $t=4$

نلاحظ تحقق (3) $-7=-7$ ومنه $\boxed{I(7,-1,7)}$

d) نقطة منه $A(3,-1,1)$ وناظمه $\vec{n}(a,b,c)$ ونجعله يعامد شعاعي توجيه غير مرتبطين خطياً وهما : $\vec{u},\vec{v}$

$$\begin{matrix}\vec{n}\perp\vec{u}\ \leftrightarrow\vec{n}.\vec{u}=0\Rightarrow a-2c=0\\ \vec{n}\perp\vec{v}\leftrightarrow\vec{n}.\vec{v}=0\Rightarrow 2a+b-3c=0\end{matrix}$$ بفرض $c=1$

بالحل المشترك : $\begin{cases}a-2=0 & (1)\\ 2a+b-3=0 & (2)\end{cases}$, $a=2$, $b=-1$

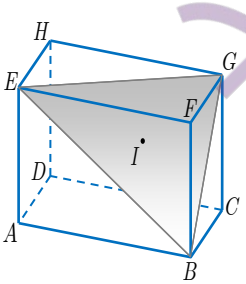
$$\Leftarrow\vec{n}(2,-1,1)$$

$$(P):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$(P):2(x-3)-1(y+1)+1(z-1)=0$$

$$\boxed{(P):2x-y+z-8=0}$$

[4] ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات.



لنفترض أنّ $FG=1$ و $FE=FB=2$.

نختر معلماً متجانساً $(F;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ بوضع $\vec{i}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{FG}$ و $\vec{k}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}$.

a) جد معادلة المستوي (EGB) .

b) جد تمثيل وسيطي للمستقيم المار من F والمعامد لـ (EGB)

c) احسب إحداثيات H المسقط القائم للنقطة F على (EGB) .

d) احسب $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{HG}$ و $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{HB}$

e) هل H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EGB .

f) احسب حجم الهرم $EFGB$.

g) استنتج مساحة المثلث EGB .

الحل:

$$\left(F;\frac{1}{2}\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FG},\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}\right)$$

$F(0,0,0)$	$E(2,0,0)$	$H(2,1,0)$
$G(0,1,0)$	$B(0,0,2)$	$A(2,0,2)$
$D(2,1,2)$	$C(0,1,2)$	

a) نقطة منه $B(0,0,2)$ وناظمه $\vec{n}(a,b,c)$ نجعله يعامد شعاعي توجيه غير مرتبطين خطياً حيث: $\overrightarrow{EB}(-2,0,2)$, $\overrightarrow{EG}(-2,1,0)$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات .

$\vec{n}\perp\overrightarrow{EG} \leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{EG}=0\Rightarrow -2a+b=0$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{EB} \leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{EB}=0\Rightarrow -2a+2c=0$ وبفرض $c=1$

بالحل المشترك نجد: $a=1$, $b=2$ $\begin{cases}-2a+b=0 & (1)\\ -2a+2=0 & (2)\end{cases}$

$\vec{n}(1,2,1)$ $\Leftarrow$

$(EGB): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$(EGB): 1(x-0)+2(y-0)+1(z-2)=0$

$$\boxed{(EGB): x+2y+z-2=0}$$

b) المستقيم d مار من $F(0,0,0)$ و يعامد (EGB) أي: $\vec{v_d}=\vec{n}(1,2,1)$ $\Leftarrow$

$$\boxed{(d):\begin{cases}x=t\\ y=2t\\ z=t\end{cases};\ t\in\mathbb{R}}$$

c) بما أنّ d مار من F و يعامد (EGB) فإنّ مسقط F على (EGB) هو نقطة تقاطع d و (EGB) نوجدها بالحل المشترك: H

$t+4t+t-2=0$

$6t=2\Rightarrow t=\frac{1}{3}$ $\rightarrow$ $\boxed{H\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}$

d) • $\overrightarrow{EB}(-2,0,2)$, $\overrightarrow{HG}\left(\frac{-1}{3},\frac{1}{3},\frac{-1}{3}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{HG}=\frac{2}{3}+0-\frac{2}{3}=0$

$\rightarrow \overrightarrow{EB}\perp\overrightarrow{HG}$ $\rightarrow$ $\boxed{(EB)\perp(HG)\ (1)}$

• $\overrightarrow{EG}(-2,1,0)$, $\overrightarrow{HB}\left(\frac{-1}{3},\frac{-2}{3},\frac{5}{3}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{EG}.\overrightarrow{HB}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+0=0$

$\rightarrow \overrightarrow{EG}\perp\overrightarrow{HB}$ $\rightarrow$ $\boxed{(EG)\perp(HB)(2)}$

e) من (1) الارتفاع المتعلق بالضلع (EB) (HG)

من (2) الارتفاع المتعلق بالضلع (EG) (HB)

H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث (EBG) $\Leftarrow$

f) $V=\frac{1}{3}\cdot S_{FGB}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{FG\times FB}{2}\times FE=\frac{1}{3}\times\frac{1\times 2}{2}\times 2=\frac{2}{3}$

g) $V=\frac{1}{3}\cdot S_{EGB}\cdot FH$ ومنه $S_{EGB}=\frac{3V}{FH}=\frac{3\times\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}$

[5] لدينا النقطة $A(2,1,2)$ ، والمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$:

$\mathcal{P}: x+y-2z-1=0, \mathcal{Q}: x+y+z=0$

a) علّل كون $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعين بالفصل المشترك d للمستويين.

b) أثبت أنّ d هو النقاط $M\left(x,-x+\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ عندما $x\in\mathbb{R}$.

c) أعطِ شعاعاً موجّهاً $\vec{v}$ للمستقيم d . ثم جد $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{v}$

d) استنتج بعد A عن الفصل المشترك d بطريقة ثانية.

e) اكتب معادلة للمستوي العمودي على $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ ويمر بالنقطة A .

الحل:

a) ندرس الارتباط الخطي للنواظم: $\vec{n}_P(1,1,-2)$, $\vec{n}_Q(1,1,1)$

المركبات غير متناسبة فالنواظم غير مرتبطة خطياً فالمستويان متقاطعان.

b) لدينا معادلتي المستويين :

$\begin{matrix}\mathcal{P}: x+y-2z-1=0 & (1)\\ \mathcal{Q}: x+y+z=0 & (2)\end{matrix}$ بالطرح نجد : $-3z=1$

$z=\frac{-1}{3}$ نعوّض ب (2) نجد: $y=-x+\frac{1}{3}$ $\leftarrow$

أي d هو مجموعة النقاط :

أيّ $M\left(x,-x+\frac{1}{3},\frac{-1}{3}\right)$:

$$(d):\begin{cases}x\\ y=-x+\frac{1}{3}\\ z=\frac{-1}{3}\end{cases}\quad x\in\mathbb{R}$$

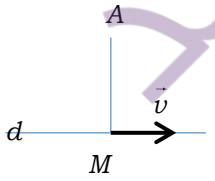
c) $\overrightarrow{AM}\left(x-2,-x-\frac{2}{3},\frac{-7}{3}\right)$, $\vec{v}(1,-1,0)$

$\overrightarrow{AM}.\vec{v}=x-2+x+\frac{2}{3}=2x-\frac{4}{3}$

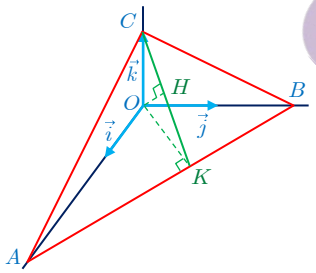
d) $\overrightarrow{AM}.\vec{v}=0\Rightarrow 2x-4=0\Rightarrow x=2$

فتكون $M\left(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{-1}{3}\right)$

$AM=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{16}{9}+\frac{49}{9}}=\sqrt{\frac{81}{9}}=3$



[6] نتأمّل رباعي الوجوه $OABC$ ثلاثي الزوايا القائمة رأسه O، نختر معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ بوضع $\vec{i}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ و $\vec{j}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ و $\vec{k}=\overrightarrow{OC}$.



a) جد معادلة المستوي (ABC)

b) جد تمثيل وسيطي للمستقيم d المار من O والمعامد لـ (ABC)

c) احسب إحداثيات H إلى المسقط القائم للنقطة O على (ABC).

d) لتكن النقطة P المسقط القائم للنقطة H على المستوي (ABO)، والنقطة L المسقط القائم للنقطة P على (BO). احسب الطول LH

الحل: $A(2,0,0), B(0,2,0), C(0,0,1), O(0,0,0)$

a) معادلة المستوي (ABC) هي $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$ ومنه

$$x+y+2z=2$$

b) تمثيل وسيطي للمستقيم d هو $(d):\begin{cases}x=t\\y=t\\z=2t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

c) بما أن المستقيم d يعامد المستوي (ABC) فإن H هي نقطة التقاطع

بالحل المشترك نجد: $t+t+4t=2\Rightarrow 6t=2\Rightarrow t=\frac{1}{3}$

ومنه $H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

d) لدينا من الطلب السابق ← $H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

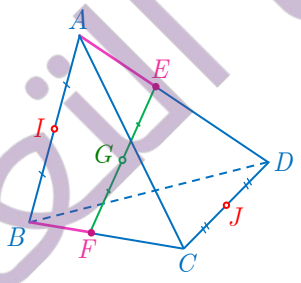
P مسقط H على (ABO) ← $P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$

L مسقط P على (BO) ← $L\left(0,\frac{1}{3},0\right)$

$$LH=\sqrt{\frac{1}{9}+0+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

[7] $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه 4. I و J هما، بالترتيب، منتصفا $[AB]$ و $[CD]$. و E و F نقطتان تحقّقان: $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

و G هي منتصف $[EF]$.



a) أثبت أنّ G مركز الأبعاد لـ $(A,3)$ و $(B,3)$ و $(C,2)$ و $(D,2)$.

b) استنتج أنّ I و J و G تقع على استقامة واحدة.

الحل:

a) من العلاقة $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ نجد E م.أ.م للنقاط $(A,3),(D,2)$ فتكون $(E,5)$ ومن العلاقة: $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ نجد F م.أ.م للنقاط $(B,2),(C,3)$ فتكون $(F,5)$.

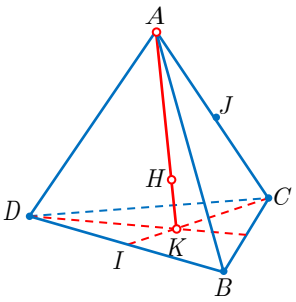
لدينا G منتصف $[EF]\Leftarrow$ م.أ.م للنقاط $(E,5),(F,5)$ فتكون $(G,10)$ حسب الخاصة التجميعية G مركز الأبعاد لـ $(A,3)$ و $(B,3)$ و $(C,2)$ و $(D,2)$.

b) لدينا $\boxed{G}$ مركز الأبعاد لـ $(A,3)$ و $(B,3)$ و $(C,2)$ و $(D,2)$

I منتصف $[AB]\Leftarrow$ م.أ.م للنقاط $(A,3),(B,3)$ فتكون $(I,6)$

J منتصف $[CD]\Leftarrow$ م.أ.م للنقاط $(C,2),(D,2)$ فتكون $(J,4)$ وحسب الخاصة التجميعية: G مركز أبعاد للنقاط $(I,6),(J,4)$ فالنقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة.

[8] $ABCD$ رباعي وجوه ولتكن H مركز ثقل الرباعي وليكن K مركز ثقل BCD. I و J هما، بالترتيب، منتصفا $[DB]$ و $[CA]$.



a) أثبت أن H تقع على (AK) ثم عين موقع H على $[AK]$.

b) اثبت أن H و I و J على استقامة واحدة.

c) استنتج أن A,K,I,J تقع في مستو واحد.

d) أثبت أنّ: $2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=AB^2-BC^2+CD^2-DA^2$

الحل:

a) H مركز ثقل رباعي الوجوه أي H م.أ.م للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ فتكون $(H,4)$.

K مركز ثقل BCD أي K م.أ.م للنقاط $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ فتكون $(K,3)$ ومن حسب الخاصة التجميعية: H مركز أبعاد لـ $(A,1)$ و $(K,3)$

ومنه النقاط A,H,K على استقامة واحدة.

وبالتالي H تقع على $(AK)\Leftarrow$ $\overrightarrow{AH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AK}$.

b) I منتصف $[DB]\Leftarrow$ I م.أ.م للنقاط $(B,1),(D,1)$ فتكون $(I,2)$

J منتصف $[CA]\Leftarrow$ I م.أ.م للنقاط $(A,1),(C,1)$ فتكون $(J,2)$

ولدينا H م.أ.م للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ ومنه حسب الخاصة التجميعية: H م.أ.م للنقاط $(I,2)$ و $(J,2)$ ومنه H و I و J على استقامة واحدة.

c) من الطلب الأول $H\in(AK)$ ومن الطلب الثاني $H\in(IJ)$ فالمستقيمان (AK) و (IJ) متقاطعان في H والمستقيمان المتقاطعان يقعان في مستوي واحد ومنه A,K,I,J تقع في مستو واحد.

d) نستفيد من الخاصة $\vec{u}^2-\vec{v}^2=(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$. فنجد

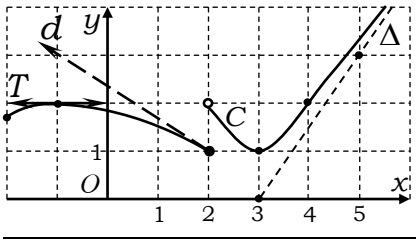
$$AB^2-BC^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$$
$$CD^2-DA^2=(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})$$

وبالجمع بعد ملاحظة أنّ $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{BD}$ نجد

$$\begin{aligned}AB^2-BC^2+CD^2-DA^2&=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})\\&=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}))\\&=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{BD})=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

حل ورقة عمل لمادة التحليل

[1] ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[-2,+\infty[$



a) جد $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -1} f(f(x))$.

b) هل f مستمر عند 2؟ وهل هو اشتقاقي عند 2؟

c) جد $f(-1), f'(-1)$ ثم اكتب معادلة للمماس T عند -1.

d) جد $f(2), f'(2^-)$ واكتب معادلة لنصف المماس d عند 2.

e) استنتج $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-1}{x-2}$.

f) ما عدد القيم الحدية محلياً وهل $f(2)$ قيمة حدية محلياً؟ علل.

g) جد معادلة المقارب Δ واستنتج $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-\frac{3}{2}x$.

h) جد مجموعة تعريف g المعرف وفق $g(x)=\ln(f(x)-2)$.

i) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=2$.

الحل:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to -1} f(f(x))=\lim\limits_{X\to 2^-} f(X)=1$.

b) f غير مستمر عند 2 فهو غير اشتقاقي عند 2.

c) $f(-1)=2, f'(-1)=0$ ومعادلة للمماس T عند -1 هي $y=2$.

d) المستقيم d يمر من $(2,1),(-1,3)$ لذلك $f'(2^-)=\dfrac{3-1}{-1-2}=-\dfrac{2}{3}, f(2)=1$

ومعادلة نصف المماس d عند 2: $y=f(2^-)(x-2)+f(2)$

ومنه $y=-\dfrac{2}{3}(x-2)+1\Rightarrow y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{7}{3}$

e) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2^-)=-\dfrac{2}{3}$.

f) عدد القيم الحدية محلياً هو 4

$f(2)=1$ قيمة حدية صغرى محلياً بسبب وجود المجال المفتوح $]1,2.5[$ بحيث أيا كانت x منه فإن $f(x)\geq f(2)=1$.

g) جد معادلة المقارب Δ المستقيم $\Delta: y=ax+b$ يمر من $(3,0),(5,3)$ لذلك $a=\dfrac{3-0}{5-3}=\dfrac{3}{2}$ ومنه $y=\dfrac{3}{2}x+b$ بالتعويض في النقطة $(3,0)$ نجد $0=\dfrac{3}{2}(3)+b\Rightarrow b=-\dfrac{9}{2}$ ومنه $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{9}{2}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{3}{2}$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-\frac{3}{2}x=-\dfrac{9}{2}$.

h) الشرط: $f(x)-2>0\Rightarrow f(x)>2\Rightarrow S=]4,+\infty[$.

i) حلان مختلفان.

[2] $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_0=0$ و $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$ وليكن التابع $f: x\mapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$ عند كل $n\geq 0$.

a) ادرس تغيرات التابع f.

b) أثبت أن $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 1$، أيّاً كان العدد n.

c) استنتج أنها متقاربة. وحدد نهايتها.

d) نعرف $x_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ أثبت أنّ $(x_n)_{n\geq 0}$ هندسية.

e) جد x_n بدلالة n. واحسب نهايتها.

f) اكتب u_n بدلالة n واستنتج $u_n=\dfrac{3^n-1}{3^n+1}$.

g) جد نهايتها.

الحل:

a) التابع f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$، لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ ومنه $y=-3$ مقارب افقي لـ C_f، $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$ ومنه $x=1$ مقارب شاقولي لـ C_f.

$f'(x)=\dfrac{3}{(x+2)^2}>0$، فالتابع متزايد تماماً على كل مجال من المجالين: $]-\infty,-2[$, $]-2,+\infty[$ ومنه جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	2

b) نثبت ذلك بالتدريج $E(n)\to 0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 1$

$E(n+1)\to 0\leq u_{n+1}\leq u_{n+2}\leq 1$

نثبت صحة $E(0)$: $E(0)\to 0\leq u_0\leq u_1\leq 1$

$0\leq 0\leq \dfrac{1}{2}\leq 1$ محققة.

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$:

$0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 1$

لدينا f متزايد تماماً لذلك:

$f(0)\leq f(u_n)\leq f(u_{n+1})\leq f(1)$

$0\leq \dfrac{1}{2}\leq u_{n+1}\leq u_{n+2}\leq 1$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة فتكون $E(n)$ صحيحة من أجل $n\geq 0$

c) بما أن المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة من حدها الأعلى ونهايتها حل المعادلة $f(x)=x$

$\dfrac{2x+1}{x+2}=x\Rightarrow 2x+1=x^2+2x\Rightarrow 1=x^2\Rightarrow x=1$

أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.

d) لدينا $x_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ و $x_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}$ ومنه

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}}{\frac{u_n-1}{u_n+1}}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}\times\frac{u_n+1}{u_n-1}=\frac{\frac{2u_n+1}{u_n+2}-1}{\frac{2u_n+1}{u_n+2}+1}\times\frac{u_n+1}{u_n-1}$$

$$=\frac{\frac{2u_n+1-u_n-2}{u_n+2}}{\frac{2u_n+1+u_n+2}{u_n+2}}\times\frac{u_n+1}{u_n-1}=\frac{u_n-1}{3u_n+3}\times\frac{u_n+1}{u_n-1}=\frac{1}{3}$$

ثابت ومنهَ $(x_n)_{n\geq 0}$ هندسية.

e) x_n بدلالة n هو $x_n=x_m q^{n-m}=x_0 q^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$

نهايتها: $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}-\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ لان $-1<\frac{1}{3}<+1$.

f) u_n بدلالة n : $x_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ ومنه $x_n(u_n+1)=u_n-1$

أي $x_nu_n+x_n=u_n-1$ ومنه $x_nu_n-u_n=-x_n-1$

ومنه $(x_n-1)u_n=-x_n-1$ ومنه $u_n=\frac{-x_n-1}{x_n-1}$ وبالتالي $u_n=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-1}{-\left(\frac{1}{3}\right)^n-1}$

نضرب بالعدد 3^n ومنه $u_n=\frac{3^n-1}{3^n+1}$.

g) نهايتها: $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-1}{-\left(\frac{1}{3}\right)^n-1}=1$

[3] $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $v_0=2$ و $v_{n+1}=\frac{2v_n-1}{v_n}$.

a) أثبت أن $v_n\geq 1$، أيّاً كان العدد n.

b) احسب $v_{n+1}-v_n$ واستنتج اطراد المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$.

c) أثبت أن $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $x_n=\frac{1}{v_n-1}$ حسابية.

d) استنتج عبارة x_n ثم عبارة v_n بدلالة n ثم جد نهايتها.

e) نضع $S_n=x_2+x_4+\cdots+x_{2n}$. احسب S_n بدلالة n.

الحل:

a) نثبت ذلك بالتدريج $E(n)\to v_n\geq 1$

$E(n+1)\to v_{n+1}\geq 1$

نثبت صحة $E(0)$: $E(0)\to v_0\geq 1$

$2\geq 1$ محققة.

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$:

لدينا $v_{n+1}=\frac{2v_n-1}{v_n}=2-\frac{1}{v_n}$

ومن صحة $E(n)$ نجد $v_n\geq 1$ نقلب الطرفين فنجد $\frac{1}{v_n}\leq 1$ نضرب بـ -1 نجد $-\frac{1}{v_n}\geq -1$ نضيف 2 نجد $2-\frac{1}{v_n}\geq 1$ ومنه $u_{n+1}\geq 1$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة فتكون $E(n)$ صحيحة من أجل $n\geq 0$

b) نوجد الفرق: $v_{n+1}-v_n=\frac{2v_n-1}{v_n}-v_n=\frac{2v_n-1-v_n^2}{v_n}$

$=\frac{-(v_n^2-2v_n+1)}{v_n}=\frac{-(v_n-1)^2}{v_n}\leq 0$

ومنه المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

c) لدينا $x_n=\frac{1}{v_n-1}$ و $x_{n+1}=\frac{1}{v_{n+1}-1}$ نوجد الفرق:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{v_{n+1}-1}-\frac{1}{v_n-1}=\frac{1}{\frac{2v_n-1}{v_n}-1}-\frac{1}{v_n-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{2v_n-1-v_n}{v_n}}-\frac{1}{v_n-1}=\frac{v_n}{v_n-1}-\frac{1}{v_n-1}=\frac{v_n-1}{v_n-1}=1$$

ثابت ومنه $(x_n)_{n\geq 0}$ حسابية.

d) عبارة x_n بدلالة n:

$x_n=x_m+(n-m)r\Rightarrow x_n=x_0+(n-0)r\Rightarrow x_n=1+n$

عبارة v_n بدلالة n:

$x_n=\frac{1}{v_n-1}\Rightarrow x_nv_n-x_n=1\Rightarrow x_nv_n-x_n=1$

$\Rightarrow x_nv_n=x_n+1\Rightarrow v_n=\frac{x_n+1}{x_n}=\frac{n+2}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$

e) نعرف متتالية $(d_n)_{n\geq 0}$ وفق $d_n=x_{2n}$ ومنه:

$$S_n=x_2+x_4+\cdots+x_{2n}$$
$$=d_1+d_2+\cdots+d_n$$
$$=n\frac{d_1+d_n}{2}=n\frac{x_2+x_{2n}}{2}=n\frac{3+2n+1}{2}=n(2+n)$$

[4] المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $v_1=1$,$v_{n+1}=2v_n+1$

أثبت أن $v_n=2^n-1$.

الحل:

نثبت ذلك بالتدريج $E(n)\to v_n=2^n-1$

$E(n+1)\to v_{n+1}=2^{n+1}-1$

نثبت صحة $E(1)$: $E(1)\to v_1=2^1-1$

$v_1=1$ محققة.

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$:

$v_n=2^n-1$

ومنه $2v_n=2\times 2^n-2$ ومنه $2v_n+1=2\times 2^n-1$ ومنه $v_{n+1}=2^{n+1}-1$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة فتكون $E(n)$ صحيحة من أجل $n\geq 1$

[5] المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $u_1=e^3$ وعند كل $n\in\mathbb{N}$، $u_{n+1}=e\sqrt{u_n}$. و $y_n=\ln u_n-2$

a) أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية.

b) احسب y_n ثم u_n بدلالة n. ثم جد نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$.

الحل:

a) المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية لأن:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{\ln u_{n+1}-2}{\ln u_n-2}=\frac{\ln e\sqrt{u_n}-2}{\ln u_n-2}=\frac{\ln e+\ln\sqrt{u_n}-2}{\ln u_n-2}$$
$$=\frac{1+\frac{1}{2}\ln u_n-2}{\ln u_n-2}=\frac{\frac{1}{2}\ln u_n-1}{\ln u_n-2}=\frac{1}{2}\frac{\ln u_n-2}{\ln u_n-2}=\frac{1}{2}$$

b) احسب y_n ثم u_n بدلالة n. ثم جد نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$.

y_n بدلالة n : $y_n=y_m q^{n-m}=y_1 q^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

u_n بدلالة n : $y_n=\ln u_n-2$ ومنه $y_n+2=\ln u_n$

أي $u_n=e^{y_n+2}=e^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2}$ ويكون $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=e^2$

[6] f معرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\dfrac{x^3+1-\cos x}{x^2}$

a) أوجد $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

b) أثبت أنّ المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب للخط (C) عند ∞

c) ادرس الوضع النسبي مع المقارب.

الحل:

a) $$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\right).$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(x+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{(1+\cos x)}\right)=0+(1)^2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)$ نستعمل الإحاطة:

$x\in\mathbb{R}^*$ أيا كانت $-1\leq\cos x\leq+1$ ومنه $-1\leq-\cos x\leq+1$

$0\leq 1-\cos x\leq+2$ نقسم على x^2 : $0\leq\dfrac{1-\cos x}{x^2}\leq\dfrac{2}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$ حسب مبرهنة الإحاطة $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$.

c) الوضع النسبي: $f(x)-y_\Delta=\dfrac{1-\cos x}{x^2}\geq 0$

ومنه C فوق Δ. ويجد نقاط مشتركة عند $(2\pi k,2\pi k):k\in\mathbb{Z}_+^*$

[7] f معرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=-x+\sqrt{|4x^2-1|}$.

a) ادرس نهاية f عند $+\infty$. وهل يوجد مقارب افقي.

b) جد $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ واستنتج أنَّ للخط C مقارب مائل.

c) ادرس الوضع النسبي للخط C.

الحل:

a) عند $+\infty$ لدينا $4x^2-1>0$ و $\sqrt{x^2}=x$ ومنه

$$f(x)=x-\sqrt{x^2(4-\frac{1}{x^2})}=x-x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}=x\left(1-\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)$$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. لا يوجد مقارب أفقي.

b) لدينا $f(x)-x=\sqrt{4x^2-1}-2x=\dfrac{-1}{\sqrt{4x^2-1}+2x}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$$

فالمستقيم $\Delta: y=x$ مقارب للخط C للتابع f في جوار $+\infty$.

c) $f(x)-y_\Delta=f(x)-x=\sqrt{|4x^2-1|}-2x$.

نجعل $f(x)-x=0$ أي $\sqrt{|4x^2-1|}=2x$ بشرط $x\geq 0$ نربع

$|4x^2-1|=4x^2$ إما $4x^2-1=4x^2$ أي $-1=0$ أو

$4x^2-1=-4x^2$ أي $8x^2=1$ أي $x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

x	0	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$+$	0	$-$
C	Δ فوق		Δ تحت

في حالة $x<0$ يكون C فوق Δ

[8] ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{1}{(\ln x-1)^2}$.

ادرس نهاية f عند e وجد مجالاً يحوي e ويحقق $f(x)>10^2$.

الحل:

$$\lim_{x\to e}f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$f(x)>10^2\Rightarrow\frac{1}{(\ln x-1)^2}>10^2\Rightarrow\frac{1}{|\ln x-1|}>10$$

$$\Rightarrow|\ln x-1|<\frac{1}{10}\Rightarrow-\frac{1}{10}<\ln x-1<\frac{1}{10}$$

$$1-\frac{1}{10}<\ln x<1+\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{9}{10}<\ln x<\frac{11}{10}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{9}{10}}<x<e^{\frac{11}{10}}\Rightarrow x\in]e^{\frac{9}{10}},e^{\frac{11}{10}}[$$

[9] f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2-4x+8}$.

a) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثمَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x-2))$.

b) استنتج المقارب Δ عند $+\infty$. ادرس الوضع النسبي بين Δ و C.

c) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. جد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

الحل:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-2))=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+8}-(x-2)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x-2)^2+4}-(x-2)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+4}+(x-2)}\right)=0$$

b) استنتج المقارب Δ عند $+\infty$. ادرس الوضع النسبي بين Δ و C.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x-2))=0$ فإن $\Delta: y=x-2$ مقارب مائل عند $+\infty$.

الوضع النسبي : $f(x)-y_\Delta=\sqrt{(x-2)^2+4}-(x-2)>0$

ومنه C فوق Δ.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=b=-2$.

[10] f المعرف على المجال $[0,2[$ وفق $f(x)=2x-E(x)$.

a) ادرس النهاية عند 1 ثم بين فيما إذا كان مستمر عند 1

b) اكتب بعبارة مستقلة عن $E(x)$.

c) ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,2[$.

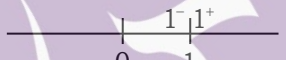
d) هل f مستمر على المجال $[0,2[$؟

e) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)$.

f) استنتج نهاية g عند $+\infty$ حيث $\left|(g(x)+3)x^2\right|\le f(x)$

الحل:

a) النهاية عند 1:



$f(1)=3$

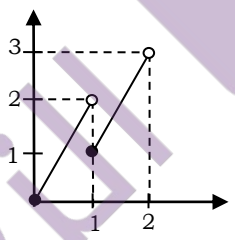
$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2x-E(x))=2+E(1^+)=3$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(2x-E(x))=2+E(1^-)=2$

النهاية عند الواحد غير موجودة وبالتالي f غير مستمر عند 1

b) $f(x)=\begin{cases}2x & x\in[0,1[\\ 2x-1 & x\in[1,2[\end{cases}$

c) الرسم:



d) نلاحظ من الرسم أن f غير مستمر على المجال $[0,2[$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-E(x)}{x^2}\right)$ نستعمل مبرهنة الإحاطة:

نعلم أن $x-1<E(x)\le x$

نضرب بـ -1 : $-x+1>-E(x)\ge-x$

نضيف $2x$: $x+1>2x-E(x)\ge x$

نقسم على $x^2>0$: $\dfrac{x+1}{x^2}>\dfrac{2x-E(x)}{x^2}\ge\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=0$

f) $\left|(g(x)+3)x^2\right|\le f(x)\Rightarrow|(g(x)+3)|\le\dfrac{f(x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-3$

[11] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

a) أثبت أن التابع فردي واستنتج الصفة التناظرية.

b) احسب نهاية f عند $+\infty$، ثم أعط عددا A يحقق: إذا كان $x>A$، كان $f(x)$ في المجال $]0.9,1.1[$.

c) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها وارسم C.

d) استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g(x)=\dfrac{|e^x-1|}{e^x+1}$.

e) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم $x=\ln 2$.

الحل:

a) أن التابع فردي لأن

الشرط الأول $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$ محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$-f(-x)=-\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-\frac{e^xe^{-x}-e^x}{e^xe^{-x}+e^x}=-\frac{1-e^x}{1+e^x}=\frac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$$

الصفة التناظرية هي أن الخط البياني للتابع f متناظر بالنسبة إلى O.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x(1-\frac{1}{e^x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=1$

$$0.9<f(x)<1.1\Rightarrow 0.9<\frac{e^x-1}{e^x+1}<1.1\Rightarrow 0.9<1+\frac{-2}{e^x+1}<1.1$$

$$-0.1<\frac{-2}{e^x+1}<0.1\Rightarrow\left|\frac{-2}{e^x+1}\right|<0.1\Rightarrow\frac{2}{e^x+1}<\frac{1}{10}$$

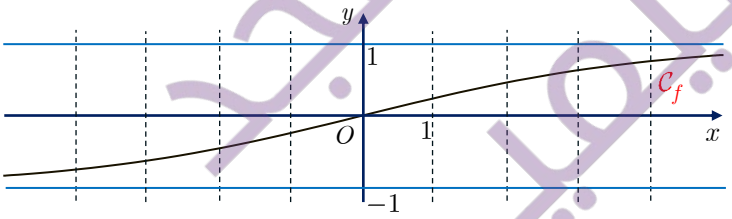
$$\frac{e^x+1}{2}>10\Rightarrow e^x+1>20\Rightarrow e^x>19\Rightarrow x>e^{19}\Rightarrow A=e^{19}$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ ومنه $y=1$ مستقيماً مقارباً في جوار $+\infty$.

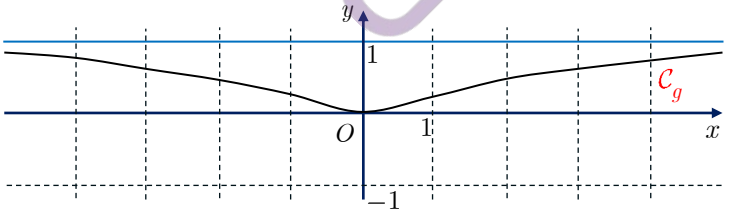
و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$, ومنه $y=-1$ مستقيماً مقارباً في جوار $-\infty$.

$$f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{2e^x}{\left(e^x-1\right)^2}>0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	↗	1



d) $g(x)=\dfrac{|e^x-1|}{e^x+1}=\left|\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right|=|f(x)|$.



e) $S=\int_0^{\ln2}f(x)\,dx=\int_0^{\ln2}1+\dfrac{-2}{e^x+1}\,dx=\int_0^{\ln2}1+2\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$

$=\left[x+2\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^{\ln2}=2\ln3-\ln2$

f)

[12] ⓐ بين إن كانت المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتين أم لا.

$$x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n},\ y_n=x_n+\frac{1}{2n}$$

ⓑ اذا علمت $x_n\leq \ln 2\leq x_n+\frac{1}{2n}$ جد نهاية $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$.

الحل:

ⓐ

$$x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$x_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}+\frac{-1}{2n+2}>0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً.

$$y_{n+1}-y_n=x_{n+1}-x_n+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n}$$

$$=\frac{1}{2n+1}+\frac{-1}{2n+2}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}<0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n-x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n}\right)=0$ ومنه المتتاليتان متجاورتين

ⓑ $x_n\leq \ln 2\leq x_n+\frac{1}{2n}$ ومنه $0\leq -x_n+\ln 2\leq \frac{1}{2n}$

ومنه $-\ln 2\leq -x_n\leq \frac{1}{2n}-\ln 2$ ومنه $\ln 2-\frac{1}{2n}\leq x_n\leq \ln 2$،

وحسب مبرهنة الإحاطة نستنتج أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\ln 2$

لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$. ومن التجاور نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\ln 2$

[13] ليكن f المعرف على $]0,4[$ وفق $f(x)=\ln\left(\frac{x}{4-x}\right)$.

a) أثبت أنَّ النقطة $A(2,0)$ هي مركز تناظر للخط C.

b) اثبت أن f اشتقاقي على $]0,4[$.

c) ادرس تغيرات f على المجال $[2,4[$ ونظِّم جدولاً بها.

d) جد معادلة للمماس عند 2 ثم ادرس الوضع النسبي معه.

e) ارسم الخط C والمماس والمقاربات.

f) استنتج رسم الخط البياني للتابع $g(x)=\ln\left(\frac{-4-x}{x}\right)$.

الحل:

a) النقطة $A(2,0)$ هي مركز تناظر للخط C لأن

الشرط الأول $\forall x\in]0,4[\Rightarrow -x\in]-4,0[\Rightarrow 4-x\in]0,4[$

الشرط الثاني: $f(x)+f(4-x)=\ln\left(\frac{x}{4-x}\right)+\ln\left(\frac{4-x}{4-4+x}\right)$

$$=\ln\left(\frac{x}{4-x}\right)+\ln\left(\frac{4-x}{x}\right)=\ln\left(\frac{x}{4-x}\frac{4-x}{x}\right)=\ln(1)=0$$

أن الخط البياني للتابع f متناظر بالنسبة إلى $A(2,0)$.

b) أن f اشتقاقي على $]0,4[$ لأنه مركب تابعين اشتقاقيين حيث:

$x\mapsto \frac{x}{4-x}$ اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ لأنه كسري فهو اشتقاقي على $]0,4[$

$x\mapsto \ln x$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$ لأنه مرجعي.

$$\forall x\in]0,4[\Rightarrow \frac{x}{4-x}\in]0,+\infty[$$

c) f اشتقاقي على المجال $[2,4[$.

$$\lim_{x\to 4}f(x)=+\infty \text{ و } f(2)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x}{4-x}}\frac{4-x+x}{(4-x)^2}=\frac{4}{x(4-x)}>0$$

x	2		4
$f'(x)$	+	+	‖
$f(x)$	0 ↗	↗	$+\infty$ ‖

d) معادلة للمماس عند 2

$$T: y=f'(2)(x-2)+f(2)\Rightarrow T: y=x-2$$

الوضع النسبي: $h(x)=f(x)-y_T=\ln\left(\frac{x}{4-x}\right)-x+2$

ندرس الاطراد: أن h اشتقاقي على $]0,4[$

$$h'(x)=\frac{4}{x(4-x)}-1=\frac{4-x(4-x)}{x(4-x)}$$

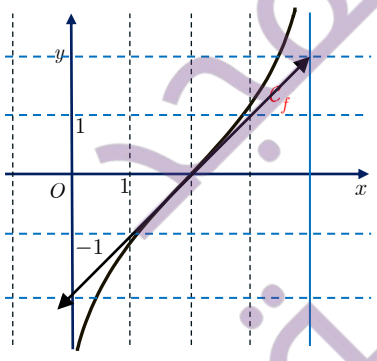
$$=\frac{4-4x+x^2}{x(4-x)}=\frac{(2-x)^2}{x(4-x)}\geq 0$$

نجعل $h'(x)=0$ ومنه $x=2$ و $h(2)=0$

x	0	2	4
$h'(x)$	‖ +	0	+
$h(x)$	‖ ↗	0	↗
	‖ −	0	+
C	‖ T تحت		T فوق

ويوجد نقطة تماس هي $(2,0)$.

e) الرسم



f) $g(x)=\ln\left(\frac{-4-x}{x}\right)=\ln\left(\frac{x}{-4-x}\right)^{-1}=-\ln\left(\frac{x}{-4-x}\right)$

$$=-\ln\left(\frac{-x}{4-(-x)}\right)=-f(-x)$$

الخط البياني للتابع g نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة للمبدأ.

g) مساحة السطح المحصور بين الخط والمحور Ox والمستقيم $x=3$

$$S=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3 \ln\left(\frac{x}{4-x}\right)dx$$

$$\begin{array}{|l|l} u=\ln\left(\dfrac{x}{4-x}\right) & v'=1 \\ \hline u'=\dfrac{4}{x(4-x)} & v=x \end{array}$$

$$S=\left[x\ln\left(\frac{x}{4-x}\right)\right]_2^3-\int_2^3 x\frac{4}{x(4-x)}dx$$

$$=\left[x\ln\left(\frac{x}{4-x}\right)\right]_2^3-\int_2^3 -4\frac{-1}{(4-x)}dx$$

$$=\left[x\ln\left(\frac{x}{4-x}\right)+4\ln(4-x)\right]_2^3$$

[14] حل المتراجحات الآتية:

a) $\ln^2 x-2\ln x-3\geq 0$.

b) $e^x-3e^{-x}-2\leq 0$

c) $3^x-3^{-x+1}\geq 2$

الحل:

a) $\ln^2 x-2\ln x-3\geq 0$.

شرط الحل $E=]0,+\infty[$

ينعدم الطرف الأول عند $(\ln x-3)(\ln x+1)\geq 0$

$\ln x=3\Rightarrow x=e^3, \ln x=-1\Rightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		e^3		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

الحل هو $S=]0,\dfrac{1}{e}]\cup[e^3,+\infty[$

b) $e^x-3e^{-x}-2\leq 0$ شرط الحل $E=\mathbb{R}$

نضرب بـ e^x نجد $e^{2x}-3-2e^x\leq 0$

أي $e^{2x}-2e^x-3\leq 0$

ومنه $(e^x-3)(e^x+1)\leq 0$ ينعدم الطرف الأول عند

$e^x=3\Rightarrow x=\ln 3,\quad e^x\neq -1$

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

الحل هو $S=]-\infty,\ln 3]$

c) $3^x-3^{-x+1}\geq 2$ شرط الحل $E=\mathbb{R}$

نضرب بـ 3^x نجد $3^{2x}-3\geq 2\times 3^x$

أي $3^{2x}-2\times 3^x-3\geq 0$

ومنه $(3^x-3)(3^x+1)\geq 0$ ينعدم الطرف الأول عند

$3^x=3\Rightarrow x=1,\quad 3^x\neq -1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

الحل هو $S=[1,+\infty[$

[15] f معرف على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ وفق $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

a) ادرس تغيرات التابع f ونظّم جدولاً بها. وعيّن قيمته الحدية.

b) ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثمّ ارسم (C).

c) جد مساحة السطح المحصور بين (C) و Ox و $x=\dfrac{1}{e}$ و $x=\dfrac{1}{e^2}$.

الحل:

a) f اشتقاقي على $]0,e[\cup]e,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-x\ln x}=\frac{1}{0-0^-}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to e^-} f(x)=\lim_{x\to e^-}\frac{1}{x(1-\ln x)}=\frac{1}{e(1-\ln e)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to e^+} f(x)=\lim_{x\to e^+}\frac{1}{x(1-\ln x)}=\frac{1}{e(1-\ln e)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x(1-\ln x)}=\frac{1}{-\infty}=0$$

$x=0$ مقارب شاقولي.

$x=e$ مقارب شاقولي.

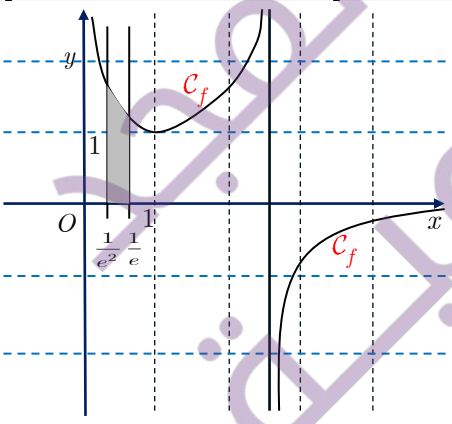
$y=0$ مقارب افقي عند $+\infty$.

$$f'(x)=\frac{-1\left(1-\ln x+x\frac{-1}{x}\right)}{(x(1-\ln x))^2}=\frac{\ln x}{(x(1-\ln x))^2}$$

نجعل $f'(x)=0$ ومنه $x=1$ ومنه $f(1)=1$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

b) الرسم:



c)

$$S=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} f(x)dx=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x(1-\ln x)}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}-\frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}dx=\left[-\ln|1-\ln x|\right]_{e^2}^{\frac{1}{e}}$$

$$=-\ln 2+\ln 3$$

[16] ليكن f المعرّف على $]0,+\infty[$: $f(x)=ax+b+\dfrac{2\ln x}{x}$

a) جد a,b لكي يكون للخط C مماس عند 1 هو $y=4x-1$ ويصبح التابع $f(x)=2x+1+\dfrac{2\ln x}{x}$

b) أثبت أن $\Delta: y=2x+1$ مقارب، وادرس الوضع النسبي

c) ادرس اطراد التابع $g(x)=2x^2+2-2\ln x$.

d) أثبت أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ وادرس تغيرات التابع f .

e) أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً يحقق $\frac{1}{2}<\alpha<1$

f) ارسم C .

g) احسب مساحة السطح بين C و Δ و $x=e$ و $x=1$.

الحل:

a) لدينا $y=4x-1$ مماس عند 1 أي $A(1,3)$ من الخط ومنه $f(1)=3$ بالتعويض $a+b=3$ ولدينا $f'(x)=a+2\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}$

$f'(1)=4$ ومنه $a+2=4\Rightarrow a=2$ ومنه $b=1$.

b) $f(x)-y_\Delta=2x+1+\dfrac{2\ln x}{x}-(2x+1)=\dfrac{2\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim\limits_{x\to\infty}2\dfrac{\ln x}{x}=0$

Δ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$.

الوضع النسبي: $f(x)-y_\Delta=\dfrac{2\ln x}{x}$ المقام موجب تماماً لذلك ندرس إشارة البسط:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	‖	$-$	0	$+$	

Δ فوق C تحت Δ

نقطة مشتركة $(1,3)$

c) g اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$g'(x)=4x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{4x^2-2}{x}$ نجعل $g'(x)=0$ ومنه $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$g(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=1+2-2\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}}=3-2\left(\ln 1-\ln\sqrt{2}\right)$

$=3+2\ln\sqrt{2}=3+\ln 2$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	$3+\ln 2$	↗	

من جدول الاطراد نجد مهما يكن x من $]0,+\infty[$ فإن

$g(x)\geq g(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=3+\ln 2>0$

d) $f'(x)=2+2\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=2+2\dfrac{1-\ln x}{x^2}=\dfrac{x^2+2-2\ln x}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$ ومنه $x=0$ مقارب شاقولي.

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}>0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$ $+$ $+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ ↗	$+\infty$

e) f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,+\infty[$.

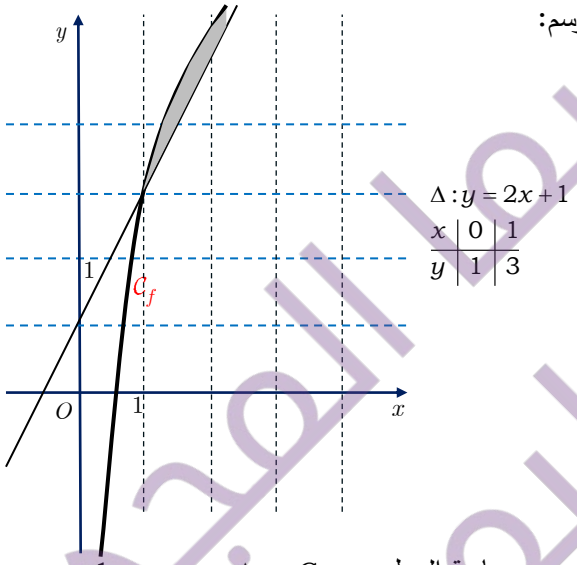
$0\in f(]0,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$

للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً على $]0,+\infty[$.

$0\in f(]\frac{1}{2},1[)=]2-4\ln 2,3[$

ومنه الحل يحقق $\frac{1}{2}<\alpha<1$

f) الرسم:



$\Delta: y=2x+1$

x	0	1
y	1	3

g) احسب مساحة السطح بين C و Δ و $x=e$ و $x=1$.

$S=\int_1^e f(x)-y_\Delta\,dx=\int_1^e 2\dfrac{1}{x}\ln x\,dx=\left[2\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=1$

[17] ليكن التابع $f(x)=\dfrac{-2}{(2x-1)(2x+1)}$ و $x_n=f(n)$

a) جد a,b : $f(x)=\dfrac{a}{2x-1}+\dfrac{b}{2x+1}$.

b) ليكن $S_n=x_0+x_1+\cdots+x_n$. عبّر عن S_n بدلالة n .

c) استنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$.

الحل:

a) $\dfrac{-2}{(2x-1)(2x+1)}=\dfrac{a}{2x-1}+\dfrac{b}{2x+1}$

$\dfrac{-2}{(2x-1)(2x+1)}=\dfrac{a(2x+1)+b(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}$

$-2=a(2x+1)+b(2x-1)$

بفرض $a=-1: x=\frac{1}{2}$ وبفرض $b=1 : x=-\frac{1}{2}$.

$$f(x)=-\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{2x+1}$$

b) $S_n=x_0+x_1+x_2+\cdots+x_n$.

$$S_n=\left(-\frac{1}{-1}+\frac{1}{1}\right)+\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2n+1}$$

c) $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)=1$

[18] حل الجملة $\begin{cases} xy=e^2 \\ (\ln x)^2+(\ln y)^2=10 \end{cases}$

الحل:

$$\begin{cases} xy=e^2 \Rightarrow y=\frac{e^2}{x} & (1) \\ (\ln x)^2+(\ln y)^2=10 & (2) \end{cases}$$

نعوض (1) في (2) نجد

$$(\ln x)^2+(\ln\frac{e^2}{x})^2=10 \Rightarrow (\ln x)^2+(\ln e^2-\ln x)^2=10$$
$$(\ln x)^2+(2-\ln x)^2=10 \Rightarrow (\ln x)^2+4-4\ln x+(\ln x)^2=10$$
$$2(\ln x)^2-4\ln x-6=0 \Rightarrow (\ln x)^2-2\ln x-3=0$$
$$(\ln x-3)(\ln x+1)=0$$
$$\ln x=3 \quad or \quad \ln x=-1$$
$$x=e^3 \Rightarrow y=\frac{1}{e} \quad or \quad x=\frac{1}{e} \Rightarrow y=e^3$$
$$S=\{(e^3,\frac{1}{e}),(\frac{1}{e},e^3)\}$$

[19] ليكن $P(x)=2x^3-x^2+4x-5$.

a) لماذا $P(x)$ يكتب بالصيغة $P(x)=(x-1)Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

b) حل المتراجحة $P(x)\le 0$.

c) استنتج حل المتراجحة $\ln(x)+\ln(2x^2+4)\le\ln(x^2+5)$

الحل:

a) نلاحظ أن $P(1)=0$ أي 1 هو جذر لكثير الحدود $P(x)$ ومنه $P(x)$ يكتب بالصيغة $P(x)=(x-1)Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

$$Q(x)=\frac{P(x)}{x-1}=\frac{2x^3-x^2+4x-5}{x-1}=2x^2+x+5$$

b) $P(x)\le 0$ ومنه $2x^3-x^2+4x-5\le 0$ ومنه

$$(x-1)(2x^2+x+5)\le 0$$

نلاحظ ان $2x^2+x+5>0$ لان $\Delta<0$ لذلك

$x-1\le 0$ ومنه $x\le 1$ ومنه $S=]-\infty,1]$

c) $\ln(x)+\ln(2x^2+4)\le\ln(x^2+5)$

شرط الحل $x>0$ و $x^2+5>0$ و $2x^2+4>0$ محققان دوماً ومنه $E=]0,+\infty[$.

$$\ln(x)+\ln(2x^2+4)\le\ln(x^2+5)$$
$$\ln(x)(2x^2+4)\le\ln(x^2+5)$$
$$(x)(2x^2+4)\le(x^2+5)$$
$$2x^3+4x\le x^2+5$$
$$2x^3+4x-x^2-5\le 0$$
$$P(x)\le 0$$

نقاطع الحل $E=]0,+\infty[$ مع شرط الحل $S=]-\infty,1]$

$$S'=]0,1]$$

[20] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق: $f(x)=\frac{x}{x+1}$.

a) جد $f'(x)$ واستنتج مشتق $\ln f(x)$ ومشتق $g(x)=\frac{\cos x}{\cos x+1}$.

b) جد $\lim_{x\to+\infty} f\circ f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}(f(x))^{2x}$.

c) أوجد مجالا I مركزه 1 يحقق الشرط إذا انتمى x إلى المجال I، انتمى $f(x)$ إلى المجال $]0.4,0.6[$.

الحل:

a) $$f'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$(\ln f(x))'=\frac{1}{f(x)}f'(x)=\frac{1}{\frac{x}{x+1}}\times\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{x(x+1)}$$

$$g(x)=\frac{\cos x}{\cos x+1}=f(\cos x)\Rightarrow g'(x)=f'(\cos x)(-\sin x)$$
$$g'(x)=\frac{1}{(\cos x+1)^2}(-\sin x)$$

b) $$n\ge 1 \quad \lim_{x\to+\infty} f\circ f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim_{X\to 1} f(X)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x))^{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{x+1}-1\right)^{2x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^{2x}=\lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^{2x}}=\lim_{x\to+\infty} e^{2x\ln\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{-1}{x+1}2x\frac{\ln\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)}{\frac{-1}{x+1}}}=\lim_{\frac{-1}{x+1}\to 0} e^{\frac{-2x}{x+1}\frac{\ln\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)}{\frac{-1}{x+1}}}=e^{-2(1)}=e^{-2}$$

c) $0.4<f(x)<0.6$ ومنه $0.4<\frac{x}{x+1}<0.6$

نقسم قسمة اقليدية $0.4<1+\frac{-1}{x+1}<0.6$

نطرح 1 نجد $-0.6<\frac{-1}{x+1}<-0.4$

نضرب بـ -1 نجد $0.6>\frac{1}{x+1}>0.4$

نقلب الطرفين $\frac{10}{6}<x+1<\frac{10}{4}$ ثم نطرح 1 نجد $\frac{4}{6}<x<\frac{6}{4}$

نختصر $\frac{2}{3}<x<\frac{3}{2}$ ومنه $x\in]\frac{2}{3},\frac{3}{2}[$.

[21] ليكن C الخط للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=xe^x$

a) أثبت أن المشتق من المرتبة n حيث $n\in\mathbb{N}^*$ يعطى بالعلاقة $f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$ ثم أوجد $f^{(10)}(x)$

b) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها واكتب مقارب خطه البياني

c) ارسم C. وناقش بيانياً حلول المعادلة $f(x)=k$.

d) استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $k(x)=\frac{x}{e^x}$.

e) جد $\ell(x)$ حلول المعادلة $E: y'+2y=0$.

f) جد الحل $h(x)=(ax+b)e^x$ للمعادلة $E': y'+2y=xe^x$.

g) احسب مساحة السطح المحصور بين C و Ox و $x=-1$.

h) جد تابعاً أصلياً F للتابع $g(x)=(f(x))^2$ على $\mathbb{R}$ بالصيغة $G(x)=(ax^2+bx+c)e^{2x}$

i) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة السابقة حول محور الفواصل دورة كاملة.

الحل:

a) نثبت ذلك بالتدريج $E(n)\to f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$

$E(n+1)\to f^{(n+1)}(x)=(x+n+1)e^x$

نثبت صحة $E(1)$: $E(1)\to f^{(1)}(x)=(x+1)e^x$

$f'(x)=(x+1)e^x$ محققة.

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$:

$f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$

نشتق الطرفين $\left(f^{(n)}(x)\right)'=\left((x+n)e^x\right)'$

ومنه E' $f^{(n+1)}(x)=e^x+(x+n)e^x=(x+n+1)e^x$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة فتكون $E(n)$ صحيحة من أجل

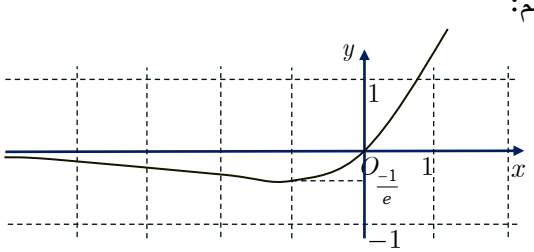
$f^{(10)}(x)=(x+10)e^x$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ ومنه $y=0$ مقارب عند $-\infty$.

$f'(x)=(x+1)e^x$ نجعل $f'(x)=0$ ومنه $x=-1$ ومنه $f(-1)=\frac{-1}{e}$ ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

c) الرسم:



مناقشة حلول المعادلة $f(x)=k$:

$-\infty<k<-\frac{1}{e}$	لا يوجد حل
$-\frac{1}{e}<k<0$	حلان مختلفان
$k=\frac{-1}{e}$, $0\le k<+\infty$	حل وحيد

d) $k(x)=\frac{x}{e^x}=xe^{-x}=-\left(-xe^{-x}\right)=-f(-x)$.

الخط C' للتابع k هو نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة للمبدأ.

e) حلول المعادلة $E: y'=-2y$ هي:

$\ell(x)=ke^{-2x}: k\in\mathbb{R}$

f) الحل $h(x)=(ax+b)e^x$ يحقق المعادلة $E': y'+2y=xe^x$

ومنه $h'(x)+2h(x)=xe^x$

ومنه $ae^x+(ax+b)e^x+2(ax+b)e^x=xe^x$

نقسم على e^x نجد $a+ax+b+2ax+2b=x$ بالمقارنة:

$a+2a=1\Rightarrow 3a=1\Rightarrow a=\frac{1}{3}$

$a+b+2b=0\Rightarrow a+3b=0\Rightarrow\frac{1}{3}+3b=0\Rightarrow b=-\frac{1}{3}$

ومنه $h(x)=(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9})e^x$

g) $S=\int_{-1}^{0}0-f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}-xe^x\,dx$

$u=-x$	$v'=e^x$
$u'=-1$	$v=e^x$

$S=\left[-xe^x\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}-e^x\,dx=\left[-xe^x+e^x\right]_{-1}^{0}=1-\frac{2}{e}$

h) لدينا $g(x)=(f(x))^2=\left(xe^x\right)^2=x^2e^{2x}$

ومنه $G'(x)=(2ax+b)e^{2x}+2(ax^2+bx+c)e^{2x}$ و

$G'(x)=g(x)$ بالتعويض:

$(2ax+b)e^{2x}+2(ax^2+bx+c)e^{2x}=x^2e^{2x}$

بالقسمة على e^{2x} يكون

$2ax+b+2ax^2+2bx+2c=x^2+0x+0$

بالمقارنة: $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{4}$ ومنه

i) الحجم

$V=\int_{-1}^{0}\pi\left(f(x)\right)^2dx$

$=\int_{-1}^{0}\pi g(x)\,dx=\left[G(x)\right]_{-1}^{0}$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{4e^2}$

[22] f المعرف على $I=]0,\infty[$ وفق $f(x)=2x-2\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

a) برهن $g(x)=x^2-2x+2x\ln x$ تابع أصلي لـ f على I

b) جد ناتج $I=\int_1^e 2x-2\ln\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

الحل:

a) g اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$g'(x)=2x-2+2\ln x+2x\times\frac{1}{x}=2x-2+2\ln x+2$$
$$=2x+2\ln x=2x-2\ln\frac{1}{x}=f(x)$$

ومنه g تابع أصلي للتابع f على $]0,+\infty[$.

b) $$I=\int_1^e 2x-2\ln\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^e f(x)\,dx=[g(x)]_1^e$$
$$=g(e)-g(1)=e^2+1$$

[23] جد ناتج كل مما يأتي:

1. $I=\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$
2. $I=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos x}\,dx$
3. $I=\int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-1}dx$
4. $I=\int_0^2 x\left|x^2-1\right|dx$

الحل:

1) $$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx=\int_1^e \frac{1}{x}(1+\ln x)dx=\left[\frac{(1+\ln x)^2}{2}\right]_1^e=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

2) $$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{2\sin^2 x}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin x\,dx$$
$$=\left[-\sqrt{2}\cos x\right]_0^{\pi}=\left[-\sqrt{2}\cos\pi+\sqrt{2}\cos 0\right]=2\sqrt{2}$$

3) $\int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-1}dx$:

$$\frac{2x-1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$$
$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$2x-1=a(x+1)+b(x-1)$$

بفرض $x=1$: $a=\frac{1}{2}$ وبفرض $x=-1$: $b=\frac{3}{2}$.

4) $$\int_0^2 x\left|x^2-1\right|dx=\int_0^1 x(-x^2+1)dx+\int_1^2 x(x^2-1)dx$$
$$=\int_0^1(-x^3+1)dx+\int_1^2(x^3-1)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^4}{4}-x\right]_1^2$$
$$=\left[-\frac{1}{4}+1\right]+\left[\left(\frac{16}{4}-2\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right)\right]=\frac{7}{2}$$

[24] نتأمّل التابع f المعرف على $I=\mathbb{R}_+^*$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}x^2(1-\ln x), & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

a) هل f مستمر عند 0.

b) هل f اشتقاقي عند الصفر من اليمين.

الحل:

a) f مستمر عند 0 لان $f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^2(1-\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2-x\times x\ln x\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0 \quad \text{أي} \quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=0$$

b) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2(1-\ln x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}x(1-\ln x)=\lim_{x\to 0^+}(x-x\ln x)=0$$

نستنتج أنَّ f اشتقاقي عند الصفر من اليمين.

ويوجد نصف مماس افقي عند الصفر من اليمين.

[25] f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ بالصيغة $f(x)=\exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

a) ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني.

b) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ المعرفة وفق $u_n=f(n)$

الحل:

a) $\lim_{x\to 1^-}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=e^{-1}$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=e^{-1}$

و $\lim_{x\to 1^+}f(x)=0$ لان $\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x}{1-x}=-1$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{1-x}=-1$

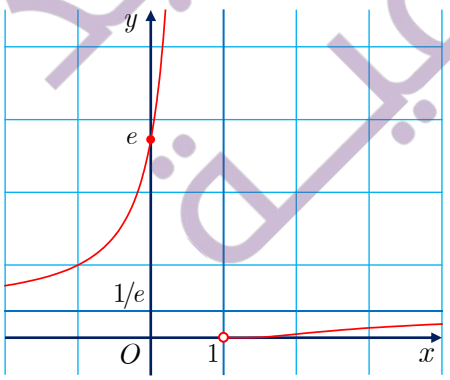
و $\lim_{x\to 1^+}\frac{1+x}{1-x}=+\infty$ و $\lim_{x\to 1^-}\frac{1+x}{1-x}=-\infty$

ومنه $y=e^{-1}$ مستقيم مقارب للخط البياني C للتابع f.

و $x=1$ مقارب للخط البياني C والنقطة $(1,0)$ نقطة مقاربة.

ولدينا $f'(x)=\frac{2}{(1-x)^2}e^{\frac{1+x}{1-x}}>0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖	$+$	
$f(x)$	e^{-1}	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ 0	$\nearrow$	e^{-1}



b) لدينا $f'(x)=\frac{2}{(1-x)^2}e^{\frac{1+x}{1-x}}>0$ وبالتالي التابع f متزايد تماماً

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ متزايد تماماً.

ورقة عمل لمادة الجبر

[1] احسب $(\sqrt{3}+3i)^2$ ثم حل: $2z^2+(3\sqrt{3}+i)z+4=0$.

الحل:

$$(\sqrt{3}+3i)^2=3+6\sqrt{3}i-9=-6+6\sqrt{3}i$$

$$2z^2+(3\sqrt{3}+i)z+4=0$$

$$a=2 \quad , \quad b=3\sqrt{3}+i \quad , \quad c=4$$

$$\Delta=b^2-4ac=\left(3\sqrt{3}+i\right)^2-4(2)(4)=-6+6\sqrt{3}i$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{3}+3i$$

$$z_1=\frac{-3\sqrt{3}-i+\sqrt{3}+3i}{4}=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$z_2=\frac{-3\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-3i}{4}=-\sqrt{3}-i$$

[2] مثّل مجموعة النقاط $M(z)$ ثم جد معادلتها التي تحقق:

(a) $\arg(z)=\frac{\pi}{2}$.

(b) $|z|^2+6\operatorname{Re} z=0$

(c) $|z-i|=|z+3-2i|$.

(d) $|iz+3+2i|=|3+2i|$

الحل:

(a) مجموعة النقاط هي نصف المستقيم الذي معادلته $x=0$ مع $y>0$. أو مجموعة الاعداد التخيلية الموجبة تماماً.

(b) $|z|^2+6\operatorname{Re} z=0$ تعطي $x^2+y^2+6x=0$

ومنه $(x+3)^2+y^2=9$

مجموعة النقاط M تمثل دائرة مركزها $(-3,0)$ ونصف قطرها $R=3$.

(c) لدينا $|z-i|=|z+3-2i|$

$$|z-(i)|=|z-(-3+2i)|$$

بفرض $z_A=i, \quad z_B=-3+2i$

$$|z_M-z_A|=|z_M-z_B|$$

$$|z_{\overline{AM}}|=|z_{\overline{BM}}|$$

$$AM=BM$$

مجموعة النقاط M تمثل مستقيم هو محور للقطعة المستقيمة $[AB]$

كتابة المعادلة:

$$M(x,y) \ , \ A(0,1) \ , \ B(-3,2)$$

$$(d): \quad AM=BM$$

$$(d):\sqrt{(x)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}$$

$$(d):x^2+y^2-2y+1=x^2+6x+9+y^2-4y+4$$

$$(d):-6x+2y-12=0$$

$$\boxed{(d):3x-y+6=0}$$

(d)

$$|iz+3+2i|=|3+2i|$$

$$|i(z-3i+2)|=|3+2i|$$

$$|i||z-(3i-2)|=|3+2i| \quad ;z_C=3i-2$$

$$|z-z_c|=\sqrt{9+4}$$

$$|z_{\overline{CM}}|=\sqrt{13}$$

$$CM=\sqrt{13}$$

مجموعة النقاط M تمثل دائرة مركزها C ونصف قطرها $R=\sqrt{13}$.

كتابة المعادلة:

$$M(x,y) \ , \ C(-2,3)$$

$$CM=\sqrt{13}$$

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{13}$$

$$\boxed{(x+2)^2+(y-3)^2=13}$$

[3] ليكن العددين z و u يحققان $|z|=1$ و $|u|=1$ و $zu\neq -1$.

أثبت أنّ $A=\frac{iu+iz}{1+zu}$ عددٌ تخيلي بحت.

الحل:

$$|u|=1 \ \rightarrow \ \overline{u}=\frac{1}{u} \quad , |z|=1 \ \rightarrow \overline{z}=\frac{1}{z}$$

$$\overline{A}=\frac{-i\overline{u}-i\overline{z}}{1+\overline{z}\overline{u}}=\frac{-\frac{i}{u}-\frac{i}{z}}{1+\frac{1}{zu}}=\frac{\frac{-iz-iu}{zu}}{\frac{zu+1}{zu}}=\frac{-(iz+iu)}{zu+1}=-A$$

ومنه A عددٌ تخيلي بحت.

[4] ليكن: $P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$.

(a) أحسب $P\left(i\sqrt{3}\right)$ واستنتج جذرين للمعادلة $P(z)=0$.

(b) جد a ، b و c بحيث: $P(z)=\left(z^2+3\right)\left(az^2+bz+c\right)$.

(c) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $P(z)=0$.

الحل:

$$P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$$

(a)

$$P\left(i\sqrt{3}\right)=\left(i\sqrt{3}\right)^4-6\left(i\sqrt{3}\right)^3+24\left(i\sqrt{3}\right)^2-18\left(i\sqrt{3}\right)+63$$

$$=9+18i\sqrt{3}-72-18i\sqrt{3}+63=0$$

وبالتالي $i\sqrt{3}$ هو جذر للمعادلة

وبما أنّ الثوابت حقيقية فإنّ الحل الآخر هو مرافقه $-i\sqrt{3}$.

(b) $p(z)=\left(z^2+3\right)\left(az^2+bz+c\right) \ \Rightarrow \left(az^2+bz+c\right)=\frac{p(z)}{\left(z^2+3\right)}$

نقسم قسمة اقليدية على $\left(z^2+3\right)$:

$$\frac{p(z)}{\left(z^2+3\right)}=\left(z^2+6z+21\right)$$

$$\left(az^2+bz+c\right)=\left(z^2+6z+21\right)\Rightarrow a=1, \quad b=-6, \quad c=21$$

c) ان حل المعادلة $P(z)=0$ يكافئ حل :

$$(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$$

♠ $z^2+3=0$

$$z^2=-3$$

$$z^2=3i^2$$

$$\Rightarrow z=\sqrt{3}i \quad , \quad z=-\sqrt{3}i$$

♠ $z^2-6z+21=0$

$a=1$, $b=-6$, $c=21$

$$\Delta=b^2-4ac=36-84=-48<0$$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان :

$$z=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{6+4\sqrt{3}i}{2}=3+2\sqrt{3}i$$

$$z=3-2\sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow \boxed{S=\{\sqrt{3}i,-\sqrt{3}i,3+2\sqrt{3}i,3-2\sqrt{3}i\}}$$

[5] لدينا النقاط A و B و C الممثلة للاعداد العقدية:

$z_A=\sqrt{3}+i$ و $z_B=\sqrt{3}-i$ و $z_C=3\sqrt{3}+i$.

a) اكتب العدد العقدي $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي

b) استنتج طبيعة المثلث ABC .

c) عيّن مجموعة النقاط التي تجعل $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ تخيلياً بحتاً ثم جد معادلتها. ثم حقيقياً ثم جد معادلتها.

الحل :

a) الجبري:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{3\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i}=\frac{2\sqrt{3}}{-2i}=\sqrt{3}i$$

الأسي :

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\sqrt{3}i=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

b)

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{z_{\overline{AC}}}{z_{\overline{AB}}}=\sqrt{3}i=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{AC}{AB}=\left|\frac{z_{\overline{AC}}}{z_{\overline{AB}}}\right|=\sqrt{3} \qquad \arg\left(\frac{z_{\overline{AC}}}{z_{\overline{AB}}}\right)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

$$(AB)\perp(AC)$$

$\Leftarrow$ المثلث (ABC) قائم في A .

c) يكون $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ تخيلي بحت :

$$*\text{اما}\ \frac{z-z_C}{z-z_B}=0\rightarrow z-z_c=0\rightarrow z=z_c=3\sqrt{3}+i$$

مجموعة النقاط تمثل نقطة وحيدة هي z_C .

$$*\ \text{أو}\ \arg\left(\frac{z_M-z_C}{z_M-z_B}\right)=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_{\overline{CM}}}{z_{\overline{BM}}}\right)=\pm\frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow (CM)\perp(BM)$$

مجموعة النقاط تمثل دائرة قطرها $[BC]$ محذوفاً منها B لأن $z\neq z_B$.

معادلة الدائرة : مركزها منتصف $[BC]$ $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=2\sqrt{3}$ ونصف قطرها : $r=\frac{BC}{2}=\frac{|z_{\overline{BC}}|}{2}=\frac{\sqrt{12+4}}{2}=\frac{\sqrt{16}}{2}=2$

$$\Leftarrow \boxed{(x-2\sqrt{3})^2+(y)^2=4}$$

يكون $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ حقيقي :

$$*\ \text{إما}\ \frac{z-z_C}{z-z_B}=0\rightarrow z-z_c=0\rightarrow z=z_c=3\sqrt{3}+i$$

مجموعة النقاط تمثل نقطة وحيدة هي z_C .

$$*\ \text{أو}\ \arg\left(\frac{z_M-z_C}{z_M-z_B}\right)=(0\quad k\quad \pi)+2\pi \ , \ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_{\overline{CM}}}{z_{\overline{BM}}}\right)=0 \ \text{و} \ \pi$$

ومنه الشعاعين $\overrightarrow{CM},\overrightarrow{BM}$ مرتبطين خطياً وتوجد نقطة مشتركة فالنقط على استقامة واحدة .

وبالتالي مجموعة النقاط M تمثل المستقيم (BC) محذوفاً منها B لأن $z\neq z_B$.

معادلة المستقيم:

$$\Delta: y=ax+b \quad ; \quad B(\sqrt{3},-1) \ , \ C(3\sqrt{3},1)$$

$$\rightarrow a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \Delta: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b \quad ; B(\sqrt{3},-1)\in\Delta\rightarrow b=-2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2}$$

[6] نضع $w=\frac{i\bar{z}-1}{i\bar{z}+1}$ حيث $z\neq -i$ ونفترض أنّ $z=x+iy$.

a) حل المعادلة $w=i$. واكتب w بالشكل الجبري.

b) أثبت أنّ مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها w تخيلياً بحتاً هي دائرة محذوف منها نقطة.

الحل :

a)

$$w=\frac{i\bar{z}-1}{i\bar{z}+1}\Rightarrow i=\frac{i\bar{z}-1}{i\bar{z}+1}$$

$$i\bar{z}-1=-\bar{z}+i$$

$$i\bar{z}+\bar{z}=1+i$$

$$\bar{z}(i+1)=1+i$$

$$\bar{z}=1 \quad \Rightarrow z=1$$

كتابة w بالشكل الجبري :

بفرض $z=x+iy \ \leftarrow \ \bar{z}=x-iy$

$$w=\frac{i\bar{z}-1}{i\bar{z}+1}$$
$$w=\frac{i(x-iy)-1}{i(x-iy)+1}$$
$$w=\frac{ix+y-1}{ix+y+1}$$
$$w=\frac{(ix+y-1)(-ix+y+1)}{(ix+y+1)(-ix+y+1)}$$
$$w=\frac{x^2+xyi+ix-xyi+y^2+y+ix-y-1}{x^2+(y+1)^2}$$
$$w=\frac{x^2+y^2-1+2xi}{x^2+(y+1)^2}$$
$$w=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+\frac{2x}{x^2+(y+1)^2}i$$

b) يكون w تخيلياً بحتاً عندما ينعدم القسم الحقيقي

$$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}=0 \quad \text{ومنه} \quad x^2+y^2-1=0$$

ومنه $x^2+y^2=1$

مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون عندها w تخيلياً بحتاً هي دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r=1$ محذوفاً منها $(0,-1)$ لان $z\neq -i$

[7] لتكن النقاط A و B و C و M نقاطاً تمثّل بالترتيب الأعداد $a=-1-i$ و $b=1-i$ و $c=2i$ و $m=-1+i$.

a) وضّع النقاط A و B و C و M في مستو مزوّد بمعلم متجانس.

b) جد d الذي يمثل D صورة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

c) أثبت أنّ O,B,M على استقامة واحدة.

d) احسب $\arg\left(\frac{c-d}{m}\right)$ ثم استنتج $(OM)\perp(DC)$.

e) جد n الذي يمثل N التي تجعل $AOND$ مربع.

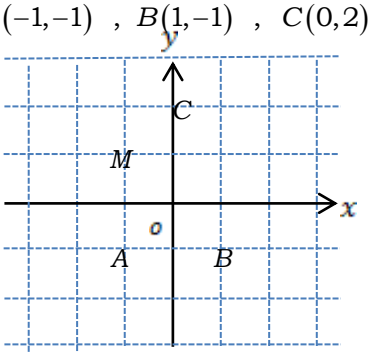
f) جد g الذي يمثل G مركز ابعاد $(A,4),(B,-8),(C,-4)$.

g) جد e الذي يمثل E صورة A وفق تحاك مركزه B ونسبته 2.

h) جد t الذي يمثل T صورة A وفق انسحاب بالشعاع $\overrightarrow{DC}$

الحل:

a) $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(0,2)$, $M(-1,1)$



b) $$z'-z_w=e^{i\theta}(z-z_w)$$

$$d=e^{i\frac{\pi}{2}}c=i(2i)=-2$$

c) $$z_{\overrightarrow{OB}}=b-o=1-i \quad , \quad z_{\overrightarrow{OM}}=o-m=1-i$$
$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OM}}}\right)=\arg\left(\frac{1-i}{1-i}\right)=\arg(1)=0+2\pi k$$

ومنه الشعاعين $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}$ مرتبطين خطياً وتوجد نقطة مشتركة فالنقط O,B,M على استقامة واحدة.

d) $$\arg\left(\frac{c-d}{m}\right)=\arg\left(\frac{2i+2}{-1+i}\right)$$
$$=\arg\left(\frac{(2i+2)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}\right)=\arg(-2i)=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$$
$$(OM)\perp(CD) \quad \Leftarrow$$

e) $AOND$ مربع فهو متوازي أضلاع

$$z_{\overrightarrow{AO}}=z_{\overrightarrow{DN}}$$
$$o-a=n-d$$
$$1+i=n+2 \rightarrow \boxed{n=-1+i}$$

f) $$g=\frac{4a-8b-4c}{4-8-4}=\frac{-4-4i-8+8i-8i}{-8}=\frac{-12-4i}{-8}$$
$$\boxed{g=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i}$$

g) $$z'-z_w=k(z-z_w)$$
$$e-b=k(a-b)$$
$$e-1+i=2(-1-i-1+i)$$
$$\rightarrow \boxed{e=-3-i}$$

h) $t=a+z_{\overrightarrow{DC}}$ ومنه $t=-1-i+2i+2=1+i$

[8] اكتب العدد $1-e^{i\frac{\pi}{5}}$ بالشكل الأسي ثم احسب المجموع $1+e^{i\frac{\pi}{5}}+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{3\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}$ واكتب الناتج بالشكل الأسي.

الحل:

$$1-e^{i\frac{\pi}{5}}=-\left(e^{i\frac{\pi}{5}}-1\right)=-e^{i\frac{\pi}{10}}\left(e^{i\frac{\pi}{10}}-\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{10}}}\right)=-e^{i\frac{\pi}{10}}\left(e^{i\frac{\pi}{10}}-e^{-i\frac{\pi}{10}}\right)$$
$$=-e^{i\frac{\pi}{10}}2i\cdot\sin\frac{\pi}{10}=2\sin\frac{\pi}{10}e^{-i\frac{4\pi}{10}}=2\sin\frac{\pi}{10}e^{-i\frac{2\pi}{5}}$$

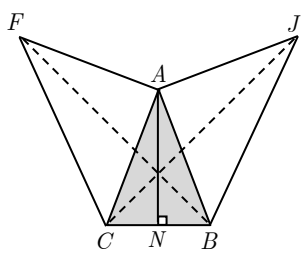
حساب المجموع :

$$1+e^{i\frac{\pi}{5}}+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{3\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}$$
$$\left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^0+\left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^1+\left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^2+\left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^3+\left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^4$$

ان هذا المجموع هو مجموع من حدود متوالية من متتالية هندسية اساسها $q=e^{i\frac{\pi}{5}}$ وحدها الأول : $a=1$ وعدد الحدود 5 $\Leftarrow$

$$S=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{1\left(1-\left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^5\right)}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}=\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}$$
$$=\frac{2}{2\sin\frac{\pi}{10}e^{-i\frac{2\pi}{5}}} \quad =\frac{1}{\sin\frac{\pi}{10}}e^{i\frac{2\pi}{5}}$$

[9] ليكن ABC مثلّثاً متساوي الساقين، رأسه A. ننشئ خارجه مثلثين قائمين ومتساويا الساقين ABJ و ACF. ليكن معلماً متجانسا مباشرا مبدؤه A.



a) جد بدلالة b و c العددين j و f.

b) اكتب العدد $\frac{f-b}{c-j}$ بالشكل الجبري.

c) أثبت أن $JC = BF$، وأن (CJ) و (BF) متعامدان.

d) نفترض أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1)\ ,(C,1),(F,2),(J,2)$ احسب $\frac{c}{b}$.

الحل:

a) لدينا معلماً متجانسا مباشرا مبدؤه A $\leftarrow$ $\boxed{z_A = 0}$

J صورة B وفق دوران مركزه (A) وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$j = e^{i\frac{\pi}{2}}b = ib$$

F صورة A وفق دوران مركزه (A) وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$f = e^{-i\frac{\pi}{2}}c = -ic$$

b) $$\frac{f-b}{c-j} = \frac{-ic-b}{c-ib} = \frac{-i\left(c+\frac{b}{i}\right)}{c-ib} = \frac{-i(c-ib)}{c-ib} = -i$$

c)

$$\frac{f-b}{c-j} = \frac{z_{\overrightarrow{BF}}}{z_{\overrightarrow{JC}}} = -i$$

$$\frac{BF}{JC} = \left|\frac{z_{\overrightarrow{BF}}}{z_{\overrightarrow{JC}}}\right| = |-i| = 1 \qquad (\overrightarrow{BF},\overrightarrow{JC}) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{BF}}}{z_{\overrightarrow{JC}}}\right)$$

$$\Rightarrow BF = JC \qquad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$(BF) \perp (JC)$$

d) A مركز الأبعاد للنقاط المثقلة $(B,1)\ ,(C,1),(F,2),(J,2)$

$$\frac{1z_B + 1z_C + 2z_F + 2z_J}{6} = z_A$$

$$b - a + c - a + 2f - 2a = 0$$

$$b + c - 2ic + 2ib = 0$$

$$b + 2ib = -c + 2ic$$

$$b(1+2i) = c(-1+2i)$$

$$\frac{c}{b} = \frac{1+2i}{-1+2i} = \frac{(1+2i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}$$

$$= \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

[10] لتكن المجموعة $S = \{0,3,5,6,8,9\}$.

a) ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات؟

b) ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة مثنى؟

c) ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مجموعها فردي؟

d) ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة وكل عدد منها من مضاعفات العدد 5 وأصغر من 600؟

الحل:

a) $\square\square\square$

$$5\times6\times6 = 180$$

b) $\square\square\square$

$$5\times5\times4 = 100$$

c) ملاحظة: مجموع ثلاث خانات:

ز + ز + ز = ز

ز + ز + ف = ف

ز + ف + ف= ز

ف +ف + ف = ف

فردي: odd ، زوجي: $Even$

$\boxed{O}\boxed{O}\boxed{O}$ $3\times3\times3$ + $\boxed{O}\boxed{E}\boxed{E}$ $3\times3\times3$ + $\boxed{E}\boxed{O}\boxed{E}$ $2\times3\times3$ + $\boxed{E}\boxed{E}\boxed{O}$ $2\times3\times3 = 90$

d) $\boxed{3}\square\boxed{0,5}$ $1\times4\times2 = 8$ أو $\boxed{5}\square\boxed{0}$ $1\times4\times1 = 4$

ومنه عدد الطرق هو $8+4 = 12$

[11] جد أمثال الحد $\frac{1}{y}$ في منشور $\left(y + \frac{i}{y^2}\right)^8$ وهل هو حقيقي.

الحل:

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$T_r = \binom{8}{r} (y)^{8-r} \left(\frac{i}{y^2}\right)^r$$

$$T_r = \binom{8}{r} (y)^{8-r} (i)^r (y)^{-2r}$$

$$T_r = \binom{8}{r} (y)^{8-3r} (i)^r$$

الحد الذي يحوي $\frac{1}{y} = y^{-1}$ هو عندما:

$$8 - 3r = -1$$

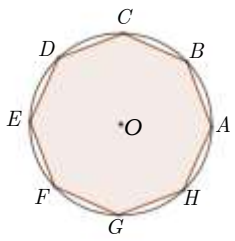
$$9 = 3r$$

$$\boxed{r = 3}$$

$$\Rightarrow T_3 = \binom{8}{3} (i)^3 (y)^{-1} = \frac{-56i}{y}$$

والعدد ليس حقيقي بل تخيلي بحت.

[12] في معلم متجانس $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$، $ABCDEFGH$



مثمّن منتظم مرسوم في دائرة نصف قطرها يساوي 1.

a) ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها ورؤوسها من رؤوس المثمن؟

b) ما عدد الرباعيات التي يمكن أن نحصل عليها ورؤوسها من رؤوس المثمن؟

c) ما عدد أقطار الدائرة التي يمكن أن نحصل عليها وطرفيها من رؤوس المثمن؟

d) ما عدد أقطار المثمّن؟

e) ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها ورؤوسها من النقاط A,B,C,D,E,F,G,H,O؟

f) ما عدد المستطيلات التي يمكن أن نحصل عليها ورؤوسها من رؤوس المثمن؟

g) ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها ورؤوسها من رؤوس المثمن؟

h) ما عدد المثلثات منفرجة التي يمكن أن نحصل عليها ورؤوسها من رؤوس المثمن؟

i) ما عدد المثلثات حادة الزوايا التي يمكن أن نحصل عليها ورؤوسها من رؤوس المثمن؟

j) لتكن الاعداد العقدية a,b,c,d,e,f,g,h التي تمثل النقاط A,B,C,D,E,F,G,H بالترتيب. جد بالشكل الجبري الاعداد العقدية a,b,c,d,e,f,g,h.

الحل:

a) $\binom{8}{3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$.

b) $\binom{8}{4}=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$

c) في حالة عدد اضلاع المضلع المنتظم زوجي يكون $\frac{n}{2}=\frac{8}{2}=4$.

d) عدد أقطار المثمن = عدد القطع المستقيمة – عدد أضلاع المحيط

$$\Rightarrow \binom{n}{2}-n=\binom{8}{2}-8=28+8=20$$

e) لدينا 9 نقاط ولكن لا يمكن أن نأخذ ثلاث نقاط واقعة على استقامة واحدة وتكون في أربع حالات $\binom{9}{3}-4=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84-4=80$.

f) $\binom{4}{2}=\frac{4\times3}{2}=6$

g) لتشكيل مثلث قائم نحتاج الى قطر دائرة وعددهم 4 و رأس من الباقي وعددهم 6 ومنه عدد المثلثات القائمة $\binom{4}{1}\binom{6}{1}=24$

h) كل رأس يصلح لكي يكون رأس لثلاثة مثلثات منفرجة الزاوية وتكون الزاوية المنفرجة في ذلك الرأس ومنه عدد المثلثات منفرجة التي يمكن أن نحصل عليها $3\times8=24$

i) عدد المثلثات الحادة هو $56-24-24=8$.

j) مضلع ثماني منتظم فتكون قياس الزاوية المركزية 360 مقسوما على 8. أي $\frac{\pi}{4}$ ومنه الاعداد العقدية

$$a=1,\ e=-1,\ c=i$$

$$b=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$d=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$h=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g=-i$$

[13] أثبت $\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$ ثم جد $\int_0^{\pi/2}\sin^3 x\,dx$.

ثم جد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3\sin x}{x^3}$.

الحل: استنتاج العلاقة :

$$\sin^3 x=(\sin x)^3=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$$
$$=\frac{-1}{8i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3$$
$$=\frac{-1}{8i}\left(e^{i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-i3x}\right)$$
$$=\frac{-1}{8i}\left(e^{i3x}-e^{-i3x}-3\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)$$
$$=\frac{-1}{8i}(2i\sin 3x-6i\sin x)$$
$$\Rightarrow\quad \boxed{\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)}$$

حساب التكامل :

$$\int_0^{\pi/2}\sin^3 x\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)dx$$
$$\int_0^{\pi/2}\frac{3}{4}\sin-\frac{1}{4}\sin 3x dx=\left[-\frac{3}{4}\cos+\frac{1}{12}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=(0)-\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{12}\right)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

حساب النهاية :

من العلاقة : $\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$

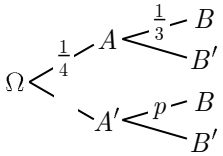
$$4\sin^3 x=3\sin x-\sin 3x$$
$$\Rightarrow\boxed{\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x}$$

نعوّض بالنهاية :

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-4\sin^3 x-3\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}-4\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3=-4$$

لأنّ : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

[14] A و B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية معروضة بالمخطط الشجري المجاور.



a) عيّن الاحتمالات $P(A')$ و $P(B'|A)$ و $P(A\cap B)$ و $P(B)$.

b) كيف نختار قيمة p ليكون الحدثان A و B مستقلين احتمالياً؟

c) احسب p إذا علمت أن $P(B)=\frac{1}{4}$

الحل:

a)

$$P(A')=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$
$$P(B'|A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$
$$P(A\cap B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$
$$P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)=\frac{1}{12}+\frac{3}{4}p$$

b) بما أنّ الحدثان A و B مستقلين احتمالياً

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$\frac{1}{12}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{12}+\frac{3}{4}P\right)$$
$$1=3\times\left(\frac{1}{12}+\frac{3}{4}P\right)$$
$$1=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}P$$
$$4=1+9P\ \rightarrow\ 3=9P\ \rightarrow\ \boxed{P=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}}$$

c)

$$P(B)=\frac{1}{12}+\frac{3}{4}p$$
$$\frac{1}{4}=\frac{1}{12}+\frac{3}{4}p$$
$$3=1+9P$$
$$2=9P\rightarrow\ \boxed{P=\frac{2}{9}}$$

[15] يحوي صندوق 5 بطاقات متماثلة لها الأرقام $-1,-1,0,1,1$ نسحب عشوائياً ثلاث بطاقات على التتالي مع الإعادة

a) إذا علمت أن مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة يساوي الصفر، ما احتمال أن تكون البطاقات مرتبة تصاعدياً؟

b) ليكن X متحول عشوائي الذي يدل على عدد الاصفار بين أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة، اكتب قيم X، وعين قانونه الاحتمالي

الحل:

a) نوع السحب ثلاث بطاقات على التتالي مع إعادة

G : مجموع أرقام البطاقات المسحوبة يساوي الصفر

N : البطاقة الأولى تحمل الرقم 0

$$\begin{matrix}1,-1,0 & & 0,0,0\\ -1,0,1 & & 0,0,0\end{matrix}$$
$$\mathbb{P}(G)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times 3!+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{25}{27}$$
$$\mathbb{P}(N\cap G)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{120}$$
$$\Rightarrow\mathbb{P}(N\mid G)=\frac{\frac{5}{120}}{\frac{25}{27}}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$$

b) $X=\{0,1,2,3\}$

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27} \quad 0,\ 0,\ 0$$

$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 3=\frac{6}{27} \quad 0',\ 0,\ 0$$

$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times 3=\frac{12}{27} \quad 0',\ 0',\ 0$$

$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27} \quad 0',\ 0',\ 0'$$

[16] صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة الصندوق (I) يحتوي كرات مرقمة بالأعداد $2,3,3$. الصندوق (II) يحتوي كرات مرقمة بالأعداد $1,2,2,3$.

أولاً: نسحب عشوائياً من أحد الصندوقين كرتين معاً إذا علمت أن مجموع رقمي الكرتين أولياً احسب احتمال أن يكون السحب من الصندوق (I) .

ثانياً: نسحب عشوائياً كرة من الصندوق (II) ونضعها في الصندوق (I)، ثم نسحب كرة من الصندوق (I).

a) احسب احتمال أن يكون مجموع الأرقام المسحوبة فردياً.

b) ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يدل على عدد الأرقام الفردية المسحوبة. عيّن قيم X ، واكتب قانونه الاحتمالي، وجد $\mathbb{E}(X),\mathcal{V}(X)$.

ثالثاً: نسحب عشوائياً كرتين من الصندوق (I)، وكرة من الصندوق (II) .

a) احسب احتمال أن يكون مجموع الأرقام المسحوبة زوجياً.

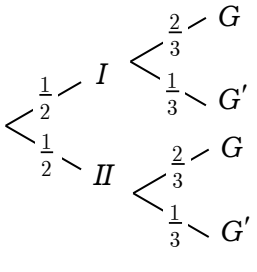
b) ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة مجموع أرقام الكرات المسحوبة. عيّن مجموعة قيم X ، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه.

الحل:

أولاً: المخطط :

G : « مجموع رقمي الكرتين أولياً »

I : «السحب من الصدوق (I) »



$$P(G\mid I)=\frac{\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{3}{2}}=\frac{2}{3} \quad \boxed{2}\boxed{3}$$

$$P(G\mid II)=\frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}}+\frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \quad \boxed{2}\boxed{3}\quad\boxed{2}\boxed{1}$$

$$P(G)=P(I)\cdot P(G\mid I)+P(II)\cdot P(G\mid II)=\frac{1}{2}\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$P(G\cap I)=P(I)\cdot P(G\mid I)=\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

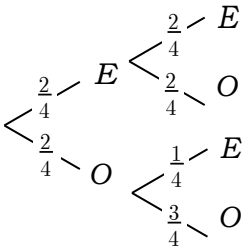
ومنه $P(I\mid G)=\dfrac{P(I\cap G)}{P(G)}=\dfrac{1}{2}$

ثانياً:

a) المخطط :

E : « الكرة المسحوبة زوجية »

O : « الكرة المسحوبة فردية »



$$P(G)=P(E)\cdot P(O\mid E)+P(O)\cdot P(O\mid E)=\frac{2}{4}\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\frac{3}{4}=\frac{10}{16}$$

b) $X=\{0,1,2\}$

$$\mathrm{P}(X=0)=P(E_1\cap E_2)=\frac{2}{4}\ \frac{2}{4}=\frac{4}{16}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=P(E_1\cap O_2)+P(O_1\cap E_2)=\frac{2}{4}\ \frac{2}{4}+\frac{2}{4}\ \frac{1}{4}=\frac{6}{16}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=P(O_1\cap O_2)=\frac{2}{4}\ \frac{3}{4}=\frac{6}{16}$$

x_i	0	1	3
p_i	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{6}{16}$

$$\mathbb{E}(X)=0\times\frac{4}{16}+1\times\frac{6}{16}+3\times\frac{6}{16}=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2)=0\times\frac{4}{16}+1\times\frac{6}{16}+9\times\frac{6}{16}=\frac{60}{16}=\frac{15}{4}$$

$$\mathcal{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2=\frac{15}{4}-\frac{9}{4}=\frac{7}{4}$$

ثالثاً:

a) الجدول:

	2	3	4	5
1,2	1,2,2	1,2,3	1,2,4	1,2,5
1,3	1,3,2	1,3,3	1,3,4	1,3,5
2,3	2,3,2	2,3,3	2,3,4	2,3,5

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

b) $X=\{5,6,7,8,9,10\}$

$$\mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{12},\ \mathrm{P}(X=6)=\frac{2}{12},\ \mathrm{P}(X=7)=\frac{3}{12}$$

$$\mathrm{P}(X=8)=\frac{3}{12},\ \mathrm{P}(X=9)=\frac{2}{12},\ \mathrm{P}(X=10)=\frac{1}{12}$$

$$\mathbb{E}(X)=5\times\frac{1}{12}+6\times\frac{2}{12}+7\times\frac{3}{12}+8\times\frac{3}{12}+9\times\frac{2}{12}+10\times\frac{1}{12}$$

$$\mathbb{E}(X)=\frac{90}{12}=\frac{15}{2}$$