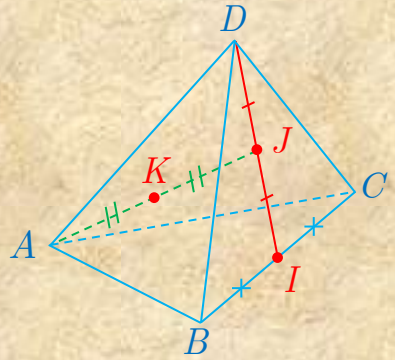
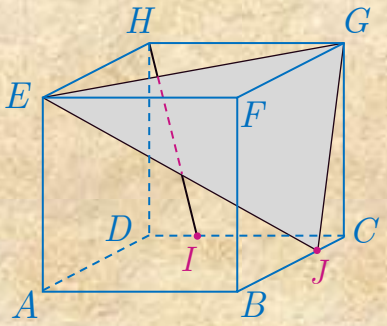




الرياضيات

الهندسة

مؤسسة سما المجد التعليمية

للصف الثالث الثانوي

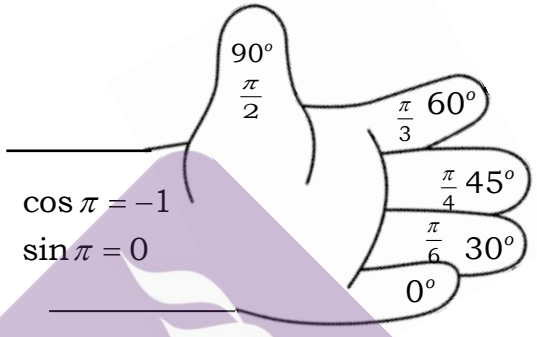
للعام الدراسي 2026-2027

اساسيات الهندسة

1. حساب النسب المثلثية

عند حساب النسب المثلثية يوجد عدة حالات:

△ **حالة زاوية شهيرة:** عندئذ نستعمل اليد اليسرى بالشكل:



$\cos\pi=-1$

$\sin\pi=0$

$$\cos 60=\frac{\sqrt{\text{الفوق}}}{2}=\frac{1}{2} \qquad \cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{\text{الفوق}}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 60=\frac{\sqrt{\text{التحت}}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{\text{التحت}}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

△ أو يمكن حفظ الجدول الآتي:

	0	30 $\frac{\pi}{6}$	45 $\frac{\pi}{4}$	60 $\frac{\pi}{3}$	90 $\frac{\pi}{2}$	180 π	270 $\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

[1] جد ناتج ما يأتي:

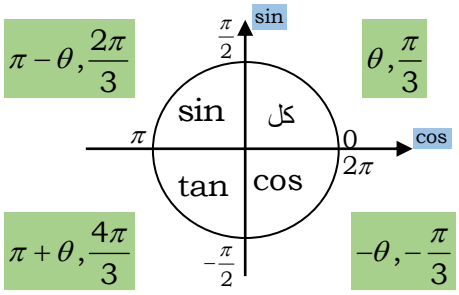
ⓐ $\cos(\frac{\pi}{6}),\ \sin(\frac{\pi}{6})$ ⓑ $\cos(\frac{\pi}{3}),\ \sin(\frac{\pi}{3})$

ⓒ $\cos(\frac{\pi}{2}),\ \sin(\frac{\pi}{2})$ ⓓ $\cos(0),\ \sin(0)$

الحل:

△ **حالة الفرق بين البسط والمقام** 1: عندئذ نستعمل القاعدتين:

$$\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3} \quad , \quad \frac{4\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$$



أي بالشكل:

$$-\frac{\pi}{3}\leftrightarrow\left[\cos\frac{\pi}{3},-\sin\frac{\pi}{3}\right] \qquad -\theta\leftrightarrow[\cos\theta,-\sin\theta]$$

$$\frac{2\pi}{3}\leftrightarrow\left[-\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}\right] \qquad \pi-\theta\leftrightarrow[-\cos\theta,\sin\theta]$$

$$\frac{4\pi}{3}\leftrightarrow\left[-\cos\frac{\pi}{3},-\sin\frac{\pi}{3}\right] \qquad \pi+\theta\leftrightarrow[-\cos\theta,-\sin\theta]$$

مثال1: جد ناتج ما يأتي:

$$\sin\frac{4\pi}{3}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{5\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{4\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

[2] جد ناتج ما يأتي:

ⓐ $\cos(\frac{5\pi}{6}),\ \sin(\frac{5\pi}{6})$ ⓑ $\cos(\frac{4\pi}{3}),\ \sin(\frac{4\pi}{3})$

ⓒ $\cos(-\frac{\pi}{4}),\ \sin(-\frac{\pi}{4})$

الحل:

△ **وإلا:** يمكن أن نطرح (أو نضيف) من أمثال البسط ضعفي المقام حتى نصل إلى إحدى الحالتين السابقتين:

$\frac{10\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$ (طرحنا 6 من 10)

$\frac{25\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ (طرحنا 12 من 25 مرتان)

$\frac{33\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ (طرحنا 8 من 33 أربع مرات)

مثال2: جد ناتج ما يأتي:

$$\cos\frac{26\pi}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{51\pi}{4}=\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{31\pi}{4}=\sin-\frac{\pi}{4}=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

[3] جد ناتج ما يأتي:

ⓐ $\cos(\frac{13\pi}{6}),\ \sin(\frac{13\pi}{6})$

ⓑ $\cos(\frac{35\pi}{6}),\ \sin(\frac{35\pi}{6})$

ⓒ $\cos(\frac{44\pi}{3}),\ \sin(\frac{44\pi}{3})$

ⓓ $\cos(-\frac{51\pi}{4}),\ \sin(-\frac{51\pi}{4})$

الحل:

2. حل معادلات مثلثية بسيطة:

△ $\sin x=\sin y\Rightarrow x=y+2\pi k\ \ or\ x=\pi-y+2\pi k$

△ $\cos x=\cos y\Rightarrow x=y+2\pi k\ \ or\ \ x=-y+2\pi k$

△ $\sin\ x=0\Rightarrow x=\pi k$

△ $\cos\ x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

[4] حل المعادلة على المجال المعطى:

ⓐ $\cos(x)=\frac{1}{2}$ على المجال $[0,2\pi]$

ⓑ $\sin(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ على المجال $[0,2\pi]$

الحل:

سما المجد التعليمية

3. قوانين مثلثية:

$\cos(-x)=\cos x$ $\sin(-x)=-\sin x$	$\cos^2x + \sin^2x = 1$ $\sin2x = 2\sin x \cos x$
$1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$	$\cos2x = \cos^2x-\sin^2x$ $=2\cos^2x-1$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

لتحويل sin إلى cos نستخدم: $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

وبالعكس $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

sin احدى زاويتان متتامتان يساوي cos الاخرى وبالعكس.

أي $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos(x), \cos(x+\frac{\pi}{2})=-\sin(x)$

الزاويتان المتكاملتان لهما نفس sin ومتعاكسان بإشارة cos.

أي $\sin(\pi - x)=\sin(x), \cos(\pi - x)=-\cos(x)$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$
$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$$
$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$
$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$$

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad , \quad \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

4. قوانين هندسة:

△ **الدائرة:** محيط الدائرة : $P = 2\pi.r$ ومساحتها: $S = \pi r^2$

△ **المثلث:**

○ مساحة المثلث $S = \frac{b \cdot h}{2}$ (b القاعدة و h الارتفاع)

أي مساحة المثلث تساوي نصف طول القاعدة بالارتفاع.

○ مساحة المثلث القائم طول ضلعي القائمتين a,b : $S = \frac{a \times b}{2}$

○ مساحة المثلث المتساوي الأضلاع : $S = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

وطول ارتفاعه : $h = a \frac{\sqrt{3}}{2}$. (a طول الضلع).

○ في المثلث متساوي الأضلاع كل ارتفاع هو متوسط ومنصف ومحور

○ في المثلث المتساوي الساقين الارتفاع المتعلق بالقاعدة هو متوسط ومنصف ومحور.

○ القطعة المستقيمة المحدودة بمنتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالثة وتساوي نصف طولها.

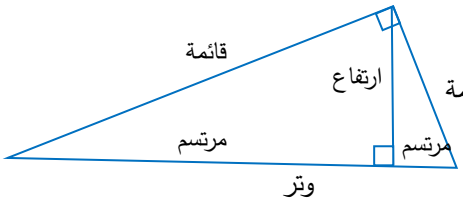
○ مبرهنة فيثاغورث: في المثلث القائم: مجموع مربعي طولي الضلعين القائمتين يساوي مربع طول الوتر

○ طول المتوسط المتعلق بالوتر يساوي نصف طول الوتر.

○ علاقة الكاشي: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

○ مبرهنة المتوسط: $m^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{2}$.

○ في المثلث القائم:



وتر ^{2} = قائمة^2 + قائمة^2

قائمة × قائمة = وتر × ارتفاع

△ **المربع:** مساحة المربع طول ضلعه a : $S = a^2$.

△ **المستطيل:** مساحة مستطيل طول ضلعيه a,b : $S = a \times b$.

△ **المعين:** مساحته نصف جداء القطرين.

△ **متوازي الأضلاع:** مساحته القاعدة ضرب الارتفاع.

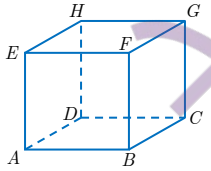
○ في متوازي الأضلاع: مجموع مربعات أطول الأضلاع يساوي مجموع مربعي طولي القطرين.

△ **المسدس المنتظم:** تمر من رؤوسه دائرة وفيه ثلاثة اقطار تقسمه الى ستة مثلثات متساوية الأضلاع.

△ **شبه المنحرف:** مساحة شبه المنحرف : $S = h \frac{b_1 + b_2}{2}$.

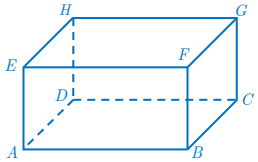
△ **المكعب:** وجوهه الستة مربعات طبوقة (أبعاده متساوية) حجمه $V = x^3$

ومساحته : $S_T = 6x^2$



△ **متوازي المستطيلات:** وجوهه الستة مستطيلات، حجمه $V = S_b . h$

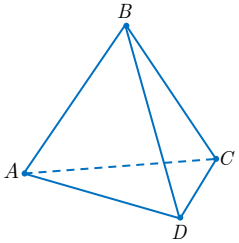
ومساحته = مجموع مساحات أوجهه.



△ **الهرم:** هو مجسم وجوهه الجانبية مثلثات وقاعدته مضلع. حجم الهرم هو $V = \frac{1}{3} S_b . h$

حيث S_b مساحة القاعدة.

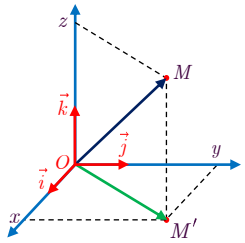
△ **رباعي الوجوه** هو هرم جميع وجوهه مثلثات.



الأشعة في الفراغ

1. الاحداثيات والمركبات:

النقطة في الفراغ:



إذا كانت النقطة M من الفراغ، تسمّى **إحداثيّات** النقطة M في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. x هي **فاصلة** M و y هي **ترتيب** M و z هي **علو** أو **راقم** M

الشعاع في الفراغ:

♣ نكتب مركبات الشعاع $\vec{u}$ بأحد الأشكال الآتية:

$$\vec{u}(x,y,z) \quad \text{أو} \quad \vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \quad \text{أو} \quad \vec{u}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

♣ لتكن النقطتان $A(x_A,y_A,z_A), B(x_B,y_B,z_B)$ عندئذ تكون مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$

ويكون $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

طويلة الشعاع:

♣ طويلة الشعاع أو نظيمُ الشعاع $\vec{u}$ الذي مركّباته (a,b,c) بالعلاقة:

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

♣ البعد بين نقطتين A,B يعطى بالعلاقة :

$$\|\overrightarrow{AB}\|=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

إحداثيات النقطة I منتصف قطعة مستقيمة AB هي:

$$I\left(\frac{x_B+x_A}{2},\frac{y_B+y_A}{2},\frac{z_B+z_A}{2}\right)$$

♣ إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC هي:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

مثال1: نتأملُ النقاط $A(1,2,-3)$ و $B(-1,3,3)$ و $C(4,-1,2)$.

ⓐ احسب مركّبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ وطول القطعة المستقيمة $[AB]$

ⓑ جد I إحداثيات منتصف $[AC]$ وإحداثيات مركز ثقل ABC

الحل1:

ⓐ $\overrightarrow{AB}(-2,1,6)$ و $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{4+1+36}=\sqrt{41}$

ⓑ $I\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2},\frac{z_A+z_C}{2}\right)=I\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)=G\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$

[1] لدينا النقاط $A(3,5,2)$ و $B(2,-1,3)$ و $C(0,-2,2)$ و $D(-2,5,1)$.

ⓐ احسب مركّبات الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$.

ⓑ احسب اطوال القطع المستقيمة $[AB]$ و $[CD]$.

ⓒ جد إحداثيات I و J منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$ و $[CD]$.

ⓓ جد إحداثيات مركز ثقل المثلث ABC .

الحل:

تساوي شعاعين:

♣ يتساوى شعاعين إذا كان لهما نفس الطول والجهة المنحى (التوازي)

♣ « $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ » يكافئ « $ABDC$ متوازي أضلاع»

مثال2: نتأملُ النقاط $A(1,2,-3)$ و $B(-1,3,3)$ و $C(4,-1,2)$.

ولتكن D نقطةً تجعل $ABCD$ متوازي أضلاع. احسب إحداثيات D، ثمَّ احسب إحداثيات I مركز متوازي الأضلاع.

الحل2: يكون $ABCD$ متوازي أضلاع إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

$$\begin{bmatrix}4-x\\-1-y\\2-z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\6\end{bmatrix}$$ بالمقارنة $x=6$ و $y=-2$ و $z=-4$،

أي $D(6,-2,-4)$.

مركز متوازي الأضلاع I، هو منتصف $[AC]$ أي $I\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

♣ لإيجاد احداثيات نقطة تحقق علاقة شعاعية نفرضها (x,y,z).

[2] لدينا النقاط $A(3,5,2)$ و $B(2,-1,3)$ و $C(0,-2,2)$ و $D(-2,5,1)$.

ⓐ جد إحداثيات النقطة M التي تحقق $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}$.

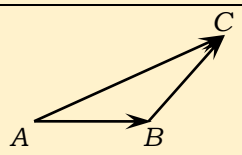
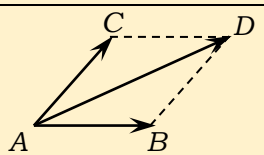
ⓑ جد إحداثيات النقطة N التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{NC}$.

ⓒ عيّن إحداثيات النقطة R بحيث يكون $ABCR$ متوازي أضلاع.

ⓓ جد إحداثيات النقطة K نظيرة A بالنسبة إلى C.

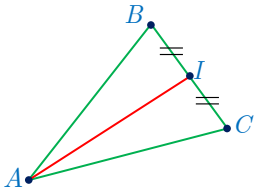
الحل:

2. جمع الأشعة: يوجد حالتان:

طريقة شال إذا كان الشعاعين متعاقبين	**طريقة متوازي الأضلاع** إذا كان للشعاعين البداية ذاتها.
	
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

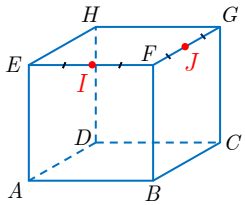
خاصة المتوسط: ضعفي شعاع المتوسط يساوي مجموع شعاعي المثلث المجاورين له.

أي $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$.



♣ لتحديد موضع نقطة تحقق علاقة شعاعية نبسط العلاقة.

[3] $ABCDEFGH$ مكعب. I منتصف $[EF]$، J منتصف $[FG]$. حدِّدْ موقع النقطة M المحققة للمساواة الشعاعية.



ⓐ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DH}$. ⓑ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

ⓒ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DG}$. ⓓ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FJ}$.

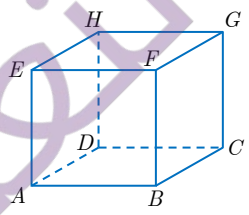
ⓔ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{EI}$.

الحل:

[4] أثبت صحة العلاقة الآتية : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CB}$.

الحل:

[5] $ABCDEFGH$ مكعب. بيّن إذا كانت النقطة M تنطبق أو لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب.



ⓐ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{HB}\right)$.

ⓑ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$.

ⓒ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

ⓓ $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

الحل:

[6] لدينا النقطتان $A\ 2,3,-2$ و $B\ 5,-1,0$. جِدْ، **إنْ أمكن**، في كل حالة، إحداثيات النقطة M المحققة للعلاقة المفروضة.

ⓐ $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{AB}$ ⓑ $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$

ⓒ $3\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ ⓓ $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

الحل:

سما المجد التعليمية

3. الارتباط الخطي لشعاعين:

لإثبات ارتباط شعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ خطياً نثبت ذلك بأحد الطرق الثلاث:

ⓐ توازي الحاملين.

ⓑ تناسب المركبات.

ⓒ وجود عدد حقيقي k يحقق $\vec{u} = k\vec{v}$.

[7] حدد فيما إذا كان الشعاعين مرتبطين خطياً.

ⓐ $\vec{u}(2,-1,3)$ و $\vec{v}(-4,2,-6)$

ⓑ $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

الحل:

♣ لإثبات أن ثلاث نقاط A,B,C تقع على استقامة واحدة نثبت أن شعاعين منها مثلاً $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا ويشتركان بنقطة.

[8] بيّن إذا كانت النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة.

ⓐ $C(2,0,-3), B(0,2,4), A(3,-1,2)$

ⓑ $A(3,5,2)$ و $B(2,-1,3)$ و $C(0,-2,2)$

الحل:

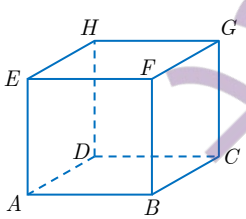
[9] أيمكن تعيين a ليكون $\vec{u}(2,a,5)$ و $\vec{v}(1,-2,a)$ مرتبطين خطّياً؟

الحل:

[10] أيمكن تعيين a و b لتقع النقاط $A(2,3,0)$ و $B(3,2,1)$ و $M(a,b,2)$ على استقامة واحدة ؟

الحل:

[11] $ABCDEFGH$ مكعب.



ⓐ عيّن شعاعاً يساوي $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF}$

ⓑ جد شعاعاً يساوي $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB}$

وأثبت أنَّ الشعاع يرتبط خطيّاً بالشعاع $\overrightarrow{DF}$.

الحل:

4. الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:

لإثبات ارتباط ثلاثة أشعة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ خطياً نثبت ذلك بأحد الطرق:

ⓐ وقوعها في مستوٍ واحد.

ⓑ ارتباط أثنين منها.

ⓒ وجود عددين حقيقيين a و b يُحقّقان العلاقة $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ حيث $\vec{u}, \vec{v}$ غير مرتبطين خطياً.

[12] حدد فيما إذا كانت الاشعة مرتبطة خطياً.

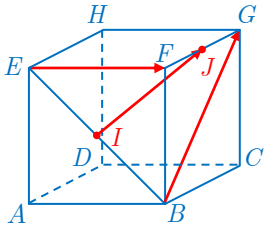
ⓐ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$.

ⓑ $\vec{u}(2,-1,3)$ و $\vec{v}(-4,2,-6)$ و $\vec{w}(3,3,1)$.

ⓒ $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{4}\overrightarrow{EC}$.

الحل:

مثال3: $ABCDEFGH$ مكعب. النقطة I منتصف $[BE]$ و J منتصف $[FG]$. أثبت أنَّ الأشعة $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطّياً.



الحل3:

① $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ}$

② $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GJ}$

نجمع ① و ② طرفاً مع طرف، فنجد

$$2\overrightarrow{IJ} = \left(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG} + \left(\overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{GJ}\right)$$
$$= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG}$$

ومنه $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$.

ومنه الارتباط الخطي للأشعة $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{IJ}$.

♣ لإثبات أن أربع نقاط A, B, C, D تقع في مستوٍ واحد نثبت أن ثلاثة أشعة منها $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطيا وتشترك بنقطة.

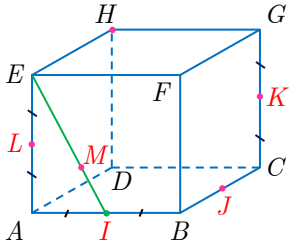
[13] لتكن: $A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$ و $C(5,5,0)$ و $D(-3,-5,6)$.

ⓐ أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

ⓑ استنتج انتماء النقاط A و B و C و D إلى مستوٍ واحد.

الحل:

[14] $ABCDEFGH$ مكعب. I و J و K و L هي بالترتيب منتصفات $[AB]$ و $[BC]$ و $[CG]$ و $[AE]$.



ⓐ جد احداثيات جميع النقاط في معلم $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

ⓑ جد احداثيات M النقطة المحققة للعلاقة $3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI}$.

ⓒ لماذا M هي مركز ثقل المثلث AEB ؟

ⓓ أتكون الأشعة $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً ؟

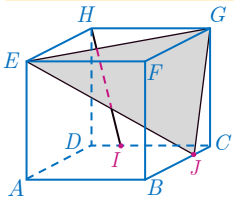
ⓔ أتكون الأشعة $\overrightarrow{LM}$ و $\overrightarrow{CJ}$ و $\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً ؟

ⓕ أتكون الأشعة $\overrightarrow{LM}$ و $\overrightarrow{HJ}$ و $\overrightarrow{JK}$ مرتبطة خطياً ؟

الحل:

♣ لإثبات مستقيم يوازي مستوي نثبت أن شعاع توجيه للمستقيم مرتبط خطيا مع شعاعي توجيه للمستوي.

[15] نتأمّل المكعب $ABCDEFGH$.



النقطة I من الحرف $[CD]$ تُحقّق $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$، والنقطة J من $[BC]$ تحقّق $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

ⓐ جد احداثيات جميع النقاط في معلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

ⓑ أثبت أنّ المستقيم (HI) يوازي (EGJ).

الحل:

سما المجد التعليمية

[16] $ABCD$ رباعي وجوه. و M هي النقطة المحققة للعلاقة

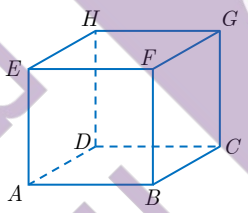
$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$$

ⓐ عبّرْ عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

ⓑ استنتج أنَّ M تنتمي إلى المستوي (ABC)

الحل:

[17] $ABCDEFGH$ مكعب. فيه M و N تُحقّق $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ ، $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$



ⓐ أثبت أنَّ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.

ⓑ هل $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{HB}$ مرتبطة خطيّاً؟

الحل:

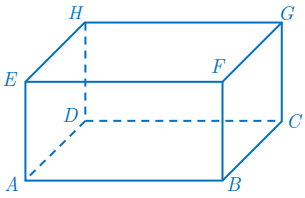
5. المعلم المتجانس:

نقول إن المعلمَ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلمٌ متجانس إذا تحقق الشرطان:

ⓐ المستقيمات (OI) و (OJ) و (OK) متعامدة مثنى.

ⓑ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$.

مثال4: $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات $AB=3, BC=2, GC=1$ النقطة I هي منتصف $[AB]$ و J هي منتصف $[CG]$.

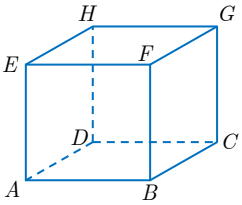


الحل4: إن المعلم $(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ متجانس.

والمعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ غير متجانس.

♣ للتعامل مع المسافات أو التعامد أو الزوايا أو الجداء السلمي، نختر معلماً متجانساً. وللتعامل مع الارتباط الخطي أو التوازي أو الاستقامة الواحدة أو المنتصفات، يمكن أن نختر معلماً كيفياً.

[18] $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 4



جد احداثيات جميع النقاط في معلم متجانس.

الحل:

6. الجداء السلمي

① **طريقة المركبات:** $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$ حيث $\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$ ، $\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$.

مثال5: لتكن $A(1,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ و $D(0,2,0)$ و $E(1,1,1)$. احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}$.

الحل5: $\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$ و $\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$ ومنه $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$.

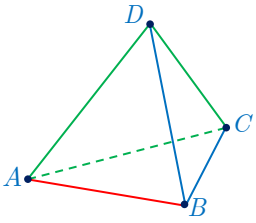
$\overrightarrow{AD}(-1,2,0)$ و $\overrightarrow{AE}(0,1,1)$ ومنه $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}=2$.

[19] ليكن $\vec{u}(2,3,5)$ و $\vec{v}(1,-2,4)$ جد $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

الحل:

② **طريقـة الزاويـة:** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos\theta$ حيث θ هو قياس للزاوية الهندسية للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

[20] $ABCD$ رباعي وجوه منتظم. كل وجه فيه مثلّثٌ متساوي الأضلاع طول ضلعه 2. احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.



الحل:

③ **طريقة المجموع:** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$.

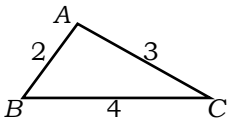
[21] أطوال الأشعّة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{v}$ هي بالترتيب 6 و 8 و 10. أيكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين؟

الحل:

♣ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

[22] في الشكل المرسوم جانباً: ABC مثلث فيه: $AB=2,\ AC=3,\ BC=4$

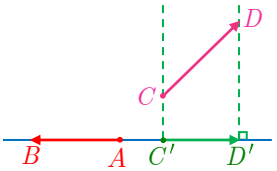
جد $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.



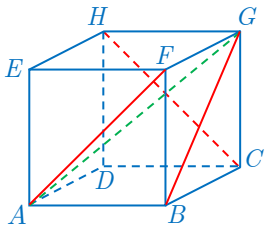
الحل:

④ **طريقة المسقط القائم:**

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{C'D'}\cdot\overrightarrow{AB}$ حيث $\overrightarrow{C'D'}$ هو المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{CD}$ على المستقيم (AB) أو على المستوي $\mathcal{P}$



مثال6: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a. احسب $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{HC}$.



الحل6: E المسقط القائم للنقطة F على (AE) و منه

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE}=a^2$

$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{BE}$ و A المسقط القائم للنقطة B على (AE) ومنه

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE}=a^2$.

H المسقط القائم للنقطة G على المستوي (ADH)، و E المسقط القائم للنقطة H على (AE) أي

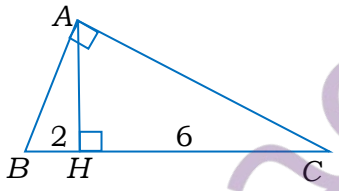
$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE}=a^2$.

$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EB}=0$

♣ إذا كان $\vec{u},\vec{v}$ مرتبطين خطياً ومن نفس الجهة كانت الزاوية بينهما 0 أي $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

♣ إذا كانا متعاكسين بالجهة كانت الزاوية بينهما π أي $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

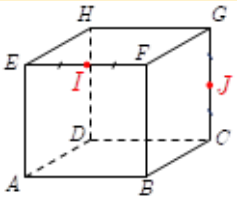
[23] في الشكل المجاور احسب $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{HC}$.



الحل:

⑤ **طريقة شال:** تكون باستبدال مجموع شعاعين بشعاع.

[24] $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 3. فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[CG]$.



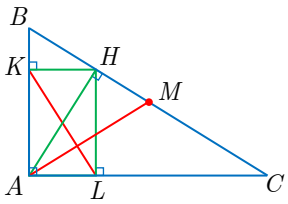
ⓐ جد $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EA}$ ، $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{FJ}$.

ⓑ جد $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{IA}$ ، $\overrightarrow{JH}\cdot\overrightarrow{IF}$، $\overrightarrow{JH}\cdot\overrightarrow{JD}$.

الحل:

مثال7: ABC مثلّثٌ قائم في A، و M منتصف $[BC]$، و H موقع الارتفاع المرسوم من A. ليكن K و L المسقطين القائمين للنقطة H على $[AB]$ و [AC]. أثبت تعامد المستقيمين (AM) و (KL).

الحل7: لإثبات تعامد (AM) و(KL)، نبرهن أنّ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{KL}=0$.



لمّا كانت M منتصف $[BC]$ كان $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ لنحسب إذن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KL}$ و $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{KL}$. با لاستفادة من المسقط القائم على (AB) نجد:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}$$

وبالاستفادة من المسقط القائم على (AC) نجد:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{KL}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}=0$$

لأنّه استناداً إلى الفرض (AH) عمودي على (BC). ومنه تعامد المستقيمين (AM) و(KL).

خواص: أياً كانت الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و$\vec{w}$ والأعداد الحقيقيّة a و b كان

ⓐ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ ⓑ $\vec{u}\cdot(v+w)=u\cdot v+u\cdot w$

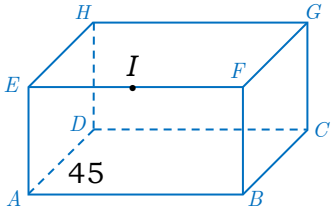
ⓒ $\vec{u}^2-\vec{v}^2=(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$

[25] إذا علمتَ أنّ نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وأنّ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-4$ فاحسب:

ⓐ $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$ ⓑ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-3\vec{v})$

الحل:

[26] (دورة 2 – 2018)



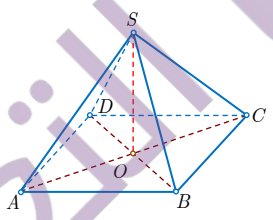
$ABCDEFGH$ متوازي سطوح النقطة $GC=1, BC=1, AB=2$. I منتصف $[EF]$ و $DAB=45$.

ⓐ احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

ⓑ جد النقطة M نقطة تُحقّق $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.

الحل:

[27] نتأمّل هرماً $S-ABCD$ قاعدته مربّع ورأسه S . وطول حرفه يساوي 2 .



احسب $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$ و $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}$ و $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}$.

الحل:

7. معادلة مستوٍ

♣ هي كل معادلة من الدرجة الأولى ولها الشكل:

$$\mathcal{P}: ax+by+cz+h=0$$

♣ شعاع ناظمٌ على المستوي P ، هو كل شعاع يعامد هذا المستوي ومركباته أمثال x,y,z . ونرمز له $\vec{n}(a,b,c)$

♣ لإيجاد معادلة مستوٍ يمرّ من نقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ، وله الناظم $\vec{n}(a,b,c)$ نعوض في المعادلة:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

♣ لإيجاد معادلة مستوي نحتاج إلى نقطة منه وناظم.

♣ في ثلاثي الأبعاد كل معادلة من الدرجة الأولى هي معادلة مستوي وفي ثنائي الأبعاد كل معادلة من الدرجة الأولى هي مستقيم.

يوجد عدة حالات لإيجاد معادلة مستوي وهي:

1- حالة نقطة وناظم:

♣ نعوض مباشرة في المعادلة :

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

مثال8: جد معادلة للمستوي $\mathcal{P}$ المار بالنقطة $A(2,1,-3)$ ويقبل $\vec{n}(1,1,2)$ شعاعاً ناظماً.

الحل8: للمعادلة الشكل:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$1\times(x-2)+1\times(y-1)+2\times(z+3)=0$$
$$x+y+2z+3=0$$

[28] أعط معادلة للمستوي $\mathcal{P}$ المار بالنقطة $A(2,1,0)$ ويقبل $\vec{n}(3,-1,2)$ شعاعاً ناظماً.

الحل:

2- حالة نقطة ومستوي موازٍ:

♣ يكون المستويان المتوازيان لهما نفس النواظم ثم نعوض في المعادلة.

[29] اكتب معادلة للمستوي $\mathcal{Q}$ المار بالنقطة $A(-1,2,-3)$ موازياً المستوي $\mathcal{P}: 2x-y+3z=4$.

الحل:

[30] (دورة 2 – 2020) اكتب معادلة للمستوي $\mathcal{Q}$ المار بالنقطة $A(1,1,-2)$ موازياً المستوي $\mathcal{P}: 2x+y-3z+2=0$.

وتحقق أن A ليست من $\mathcal{P}$.

الحل:

3- حالة ثلاثة نقاط:

♣ لإيجاد ناظم مستوي يمر من ثلاثة نقاط نفترض $\vec{n}(a,b,c)$ ونختار مثلاً $c=1$ ثم نجعله يعامد شعاعين مشكلين من النقاط.

[31] جد معادلة (ABC) حيث: $A(2,1,0)$ و $B(1,0,1)$ و $C(3,1,4)$.

الحل:

[32] جد معادلة (CDE) مع: $C(4,0,0)$ و $D(0,4,0)$ و $E(1,-1,1)$.

الحل:

4- حالة نقطتين ومستوي معامد:

♣ نفترض $\vec{n}(a,b,c)$ ونضرب الناظم بشعاع النقطتين وبشعاع الناظم. ونختار مثلاً $c=1$ ثم نحل المعادلتين.

[33] النقطتين الآتيتين: $A(1,-1,2)$ و $B(2,0,4)$ والمستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته $x-y+3z-4=0$. جِد معادلةً للمستوي $\mathcal{Q}$ العمودي على $\mathcal{P}$ ويمر بالنقطتين A و B.

الحل:

5- حالة نقطة وشعاعي توجيه:

♣ نفترض $\vec{n}(a,b,c)$ ونضرب الناظم بشعاعي التوجيه . ونختار مثلاً $c=1$ ثم نحل المعادلتين.

[34] جِد معادلةً للمستوي $\mathcal{P}$ الموجه بالشعاعين $\vec{u}(2,3,1)$ و $\vec{v}(1,-2,4)$ ويمر بالنقطة $A(1,-1,2)$.

الحل:

♣ لإثبات أن مستقيم يعامد مستوي نثبت أنه يعامد شعاعي توجيه غير مرتبطين خطياً للمستوي.

[35] $A(2,1,3)$ و $B(1,0,-1)$ و $C(4,0,0)$ و $D(0,4,0)$ و $E(1,-1,1)$

ⓐ أثبت أنّ النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

ⓑ أثبت أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE).

ⓒ جد معادلة المستوي (CDE).

الحل:

8. بعد نقطةٍ عن مستوٍ:

♣ في ثلاثي الأبعاد : بعد نقطةٍ $M_0(x_0,y_0,z_0)$ عن مستوٍ $\mathcal{P}: ax+by+cz+h=0$:

$$\text{dist}(M_0,\mathcal{P})=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+h|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

♣ في ثنائي الأبعاد بعد نقطةٍ $M_0(x_0,y_0)$ عن مستقيم $ax+by+c=0$: هو

$$\text{dist}(M_0,d)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

[36] احسب بُعد $A(5,-3,4)$ عن $\mathcal{P}: 2x-y+3z-5=0$.

الحل:

[37] احسب بعد النقطة $B(2,2,5)$ عن المستوي $\mathcal{P}: y-z=0$

الحل:

9. التمثيل الوسيطي لمستقيم

♣ التمثيل الوسيطي لمستقيم يمرّ بنقطة معلومة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ويوازي متّجهاً معلوماً $\vec{v}(a,b,c)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

♣ شعاع توجيه المستقيم L هو الشعاع $\vec{v}(a,b,c)$ والذي يوازي المستقيم. ويوجد عدد غير منته من التمثيلات الوسيطية للمستقيم.

♣ لإيجاد شعاع توجيه المستقيم نأخذ أمثال t ولإيجاد نقطة منه نفرض t عدد ما.

مثال9: في حالة $A(1,2,3)$ و $B(2,3,1)$ أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB).

الحل9: يكون $\overrightarrow{AB}(1,1,-2)$ شعاعاً موجهاً ومنه:

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = t+2 \\ z = -2t+3 \end{cases} , \ t \in \mathbb{R}$$

[38] أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d الذي يمر من النقطة $B(2,3,1)$ وله شعاع التوجيه $\vec{v}(-4,3,2)$

الحل:

القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة النّقاط $M(x,y,z)$

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} , \quad t \in [0,1]$$

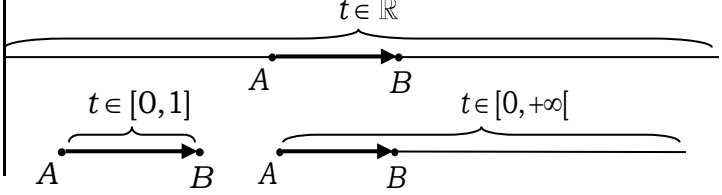
نختار النقطة A والشعاع $\overrightarrow{AB}$ أو نختار النقطة B والشعاع $\overrightarrow{BA}$

نصف المستقيم $[AB)$ الذي مبدؤه A ويمر بالنّقطة B هو مجموعة النّقاط $M(x,y,z)$ التي تُحقّق

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} , \quad t \in [0,+\infty[$$

حيث في نصف المستقيم $[AB)$ نختار النقطة A والشعاع $\overrightarrow{AB}$ وفي نصف المستقيم $[BA)$ نختار B و $\overrightarrow{BA}$

بشكل عام يمكن أن نختار نقطة اليسار وشعاع توجيه من اليسار لليمين.



[39] نتأمّل $A(-2,1,0)$ و $B(2,3,1)$. أعطِ تمثيلاً وسيطياً لكل من

ⓐ المستقيم (AB). ⓑ القطعة المستقيمة $[AB]$.

ⓒ نصف المستقيم $[AB)$. ⓓ نصف المستقيم $[BA)$.

الحل:

10. الوضع النسبي بين مستويين

المستويان إما متوازيان إذا توازى الناظمان وإلا فهما متقاطعان في مستقيم يسمى فصل مشترك.

مثال10: نعطي المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ ويُطلب معرفة إذا كانا متوازيين أو متقاطعين أو متعامدين.

الحل10: $\mathcal{Q}: x+2y-z=0, \mathcal{P}: x-4y-1=0$

الشعاعان $\vec{n}_1(1,-4,0)$ و $\vec{n}_2(1,2,-1)$ ليسا مرتبطين خطياً لأنّ مركّباتهما ليست متناسبة، ومنه $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعان. $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -7 \neq 0$

ومنه $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ ليسا متعامدين. $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ غير متعامدين.

♣ لإثبات تعامد مستويين نثبت تعامد الناظمين.

[40] ادرس تعامد زوج المستويات الآتية:

$\mathcal{P}: 2x-3y+5z=0$ و $\mathcal{Q}: 6x-11y-9z-5=0$

الحل:

♣ لإثبات تقاطع مستويين نثبت عدم ارتباط الناظمين خطياً.

[41] بيّن إذا كان المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعين.

ⓐ $\mathcal{P}: x-y+z=0, \quad Q: x-y+z-3=0$

ⓑ $\mathcal{P}: 2x+y+5=0, \quad Q: 4x+2y+z+5=0$

الحل:

11. الانتقال من معادلتي مستويين إلى التمثيل الوسيطي:

♣ نفرض مجهول مشترك بين المعادلتين مثلاً $z=t$ ثم نحل جملة المعادلتين لإيجاد x, y بدلالة t .

$$\left.\begin{array}{ll}\mathcal{P}_1: & a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ \mathcal{P}_2: & a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases}x=x_0+ta\\ y=y_0+tb\\ z=z_0+tc\end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

مثال11: نتأمّل $\mathcal{P}_1: 2x+y-z+2=0$ و $\mathcal{P}_2: x+2y-z+1=0$. تيقّن أنّهما متقاطعان، ثُمّ جِدْ تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك d .

الحل11: للمستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ الناظمين $\vec{n}_1(2,1,-1)$ و $\vec{n}_2(1,2,-1)$ بالترتيب. الشعاعان $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركّباتهما غير متناسبة، إذن المستويان $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متقاطعان نفرض مثلاً $y=t$:

$$\begin{cases}2x+t-z+2=0\\ x+2t-z+1=0\end{cases}$$

بالطرح $x=t-1$ ومنه $z=3t$. $t\in\mathbb{R}$,

$$(d)\begin{cases}x=t-1\\ y=t\\ z=3t\end{cases}$$

[42] تحقّق من تقاطع $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ وأعطِ تمثيلاً وسيطياً للفصل المشترك.

ⓐ $\mathcal{P}_1: x+y=2$ و $\mathcal{P}_2: x+z=1$.

ⓑ $\mathcal{P}_1: -x+y+z=3$ و $\mathcal{P}_2: 2x-y+2z=1$.

الحل:

[43] (دورة 1 – 2020) ليكن المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ $\mathcal{P}_1: 2x-y+z+1=0, \mathcal{P}_2: x+y-z=0$. تيقّن أنّهما متقاطعان، ثُمّ جِدْ تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك d .

الحل:

12. الوضع النسبي بين مستقيمين

لدراسة الوضع النسبي بين مستقيمين ندرس أولا التوازي من خلال ارتباط شعاعي التوجيه ثم في حالة عدم التوازي ندرس التقاطع بالحل المشترك فإذا نتج حل وحيد كان المستقيمان متقاطعان وإلا كانا متخالفان.

مثال12: أثبت انطباق المستقيمين

$$(d)\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 4t \\ z = -t+1 \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \quad \text{و} \quad (d')\begin{cases} x = -9t'+4 \\ y = -12t'+4 \\ z = 3t' \end{cases},\ t'\in\mathbb{R}$$

الحل12: d موجّه بالشعاع $\vec{u}(3,4,-1)$ و d' موجّه بالشعاع $\vec{u}'(-9,-12,3)$. ولكن $\vec{u}' = -3\vec{u}$ إذن $d \parallel d'$

نختر $t=0$ فنحصل على النقطة $A(1,0,1)$ من d نعوضها في d' فنجد أنها تنتمي أيضاً إلى d' إذن $d = d'$.

مثال13: ادرس تقاطع المستقيمين:

$$(d)\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-3 \\ z = -t+2 \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \quad \text{و} \quad (d')\begin{cases} x = 3t'+2 \\ y = -t'-1 \\ z = t'+1 \end{cases},\ t'\in\mathbb{R}$$

الحل13: بالحل المشترك نجد

$$\begin{cases} t+1 = 3t'+2 & (1) \\ 2t-3 = -t'-1 & (2) \\ -t+2 = t'+1 & (3) \end{cases}$$

نجد من ثَمّ $t=1$ و $t'=0$،

وعليه يشترك المستقيمان d و d' بالنقطة $I(2,-1,1)$.

مثال14: ادرس وضع المستقيمين:

$$d:\begin{cases} x = t+1 \\ y = -3t+2 \\ z = -3t+3 \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \quad \text{و} \quad d':\begin{cases} x = t' \\ y = -3t'-3 \\ z = -t'+1 \end{cases},\ t'\in\mathbb{R}$$

الحل14: $\vec{u}(1,-3,-3)$ و $\vec{u}'(1,-3,-1)$. المركّبات غير متناسبة ومنه $\vec{u}$ و $\vec{u}'$ غير مرتبطين خطياً.

أي إمّا أن يكون d و d' متقاطعين أو متخالفين لنبحث إذا كانا متقاطعين، علينا حلّ الجملة

$$\begin{cases} t+1 = t' & (1) \\ -3t+2 = -3t'-3 & (2) \\ -3t+3 = -t'+1 & (3) \end{cases}$$

بجمع (1),(3) نجد $-2t = -3 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$ و $t' = \frac{5}{2}$

وهذا لا يحقق (2) حيث $\frac{-5}{2} = \frac{-21}{2}$ فالمستقيمان d و d' متخالفان.

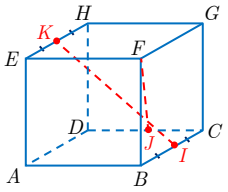
♣ المستقيمان المتوازيان والمتقاطعان يقعان في مستو واحد أما المستقيمان المتخالفان فلا يقعان.

[44] لدينا النقطتان $A(3,-1,1)$ و $B(3,-3,-1)$، والشعاعان $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$. d هو المستقيم المار بالنقطة A والموجَّه بالشعاع $\vec{u}$، و d' هو المستقيم المار بالنقطة B والموجَّه بالشعاع $\vec{v}$. أثبت أنَّ المستقيمين d و d' متقاطعان، ثمَّ عيّن I نقطة تقاطعهما.

الحل:

أسما المجد التعليمية

[45] ليكن $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 1. فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[CD]$ و K منصف $[EH]$.



نتأمّل المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

ⓐ أعطِ تمثيلاً وسيطياً لكل من (IK) و (FJ).

ⓑ أيتقاطع (IK) و (FJ)؟ هل تقع I و J و K و F في مستو واحد؟

الحل:

[46] لدينا $d:\{x=t, y=1-2t, z=-1+3t : t\in\mathbb{R}\}$ و $d':\{x=3-s, y=1-s, z=s : s\in\mathbb{R}\}$

ⓐ بين أن المستقيمان متقاطعان ثم جد نقطة التقاطع

ⓑ جد معادلة المستوي المار بالمستقيمين.

الحل:

سما المجد التعليمية

[47] (دورة 2 – 2017) اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين:

$d: \{x = t+1, y = 2-3t, z = 3-3t : t \in \mathbb{R}$

$d' : \{x = s, y = -3s-3, z = -s+1 : s \in \mathbb{R}$

وهل المستقيمان يقعان في مستوي واحد علل؟

الحل:

♣ لإثبات تعامد مستقيمين يمكننا إثبات تعامد شعاع موجّه لأحدهما مع شعاع موجّه للآخر.

[48] نتأمّل $A(2,-5,1)$ و $B(0,2,6)$. والمستقيم d الذي شعاع توجيهه $\vec{u} = -4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. أثبت أنّ d عمودي على (AB).

الحل:

[49] (دورة 1 – 2019) نتأمّل $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$.

ⓐ أعط تمثيلاً وسيطياً لـ d المار من A وله شعاع التوجيه $\vec{v}(2,2,1)$

ⓑ أثبت أنّ d عمودي على (AB).

الحل:

سما المجد التعليمية

13.الوضع النسبي بين مستقيم ومستوٍ

لدراسة الوضع النسبي بين مستقيم ومستوٍ إذا كان شعاع توجيه المستقيم يعامد الناظم كان المستقيم موازٍ للمستوي وإلا فهو قاطع بنقطة نوجدها بالحل المشترك لهما.

مثال15: مثال: نتأمّل النقطتين $A(2,1,-2)$ و $B(-1,2,1)$. والمستوي $\mathcal{P}: 2x-y+z-2=0$. تيقّن أنّ (AB) يقطع المستوي $\mathcal{P}$ في نقطة I يُطلب تعيين إحداثياتها.

الحل15: للمستقيم (AB) شعاع موجّه $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-3,1,3)$، وللمستوي $\mathcal{P}$ ناظم $\vec{n}(2,-1,1)$. و $\vec{n}\cdot\vec{u}=-4\neq 0$، فالشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{n}$ غير متعامدين أي (AB) قاطع المستوي $\mathcal{P}$.

إحداثيات نقطة التقاطع I:

$$2(-3t+2)-(t+1)+3t-2-2=0$$
$$\Rightarrow t=-\tfrac{1}{4}\Rightarrow x=\tfrac{11}{4},y=\tfrac{3}{4},z=-\tfrac{11}{4}$$

ومنه يقطع (AB) المستوي $\mathcal{P}$ في $I(\frac{11}{4},\frac{3}{4},-\frac{11}{4})$.

♣ لدراسة وضع مستقيم مع مستوٍ نعوض المستقيم في المستوي ويكون:

- اذا نتج قيمة وحيدة لـ t: يكون المستقيم قاطع للمستوي.
- اذا نتج قيمة $0=1$ مثلاً: المستقيم يوازي المستوي وغير محتوى.
- اذا نتج قيمة $0=0$ مثلاً: المستقيم محتوى في المستوي.

[50] ادرس تقاطع المستقيم d والمستوي $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{P}: x-y+z=1,\quad d:\begin{cases}x=2t-1\\ y=t\\ z=1-3t\end{cases}$$

الحل:

♣ لإثبات توازي مستقيم مع مستوي يمكننا إثبات تعامد شعاع موجّه للمستقيم مع ناظم للمستوي.

[51] أثبت تقاطع $d=(AB)$ مع المستوي $\mathcal{P}$ وعين إحداثيات نقطة التقاطع. حيث $A(-1,2,3)$ و $B(1,2,-1)$، و $\mathcal{P}: x+y+z=1$.

الحل:

♣ لدراسة انطباق مستقيمين نأخذ نقطة من احدهما بفرض t عدد ما ثم نتحقق من انتمائها الى المستقيم.

[52] أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d' وبيّن إذا كان $d\parallel d'$ أو كان d منطبقاً على d'.

$$d':\begin{cases}3x-y-2z=1\\ x-y-z=0\end{cases},\quad d:\begin{cases}x=t\\ y=-t\\ z=2t-1\end{cases}$$

الحل:

14.الكرة:

هي مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق $\Omega M^2 = R^2$

ولها المعادلة: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

حيث R نصف القطر و $\Omega(x_0,y_0,z_0)$.

مثال16: جد معادلةً للكرة S التي مركزها O ونصفُ قطرها 5.

الحل16: $x^2+y^2+z^2=25$

مثال17: جد معادلةً للكرة S' مركزها O وتمر من $A(1,2,-4)$

الحل17: نصف قطر الكرة S' يساوي OA:

$OA^2=1^2+2^2+(-4)^2=21$. ومنه $x^2+y^2+z^2=21$

[53] اكتب معادلة الكرة التي مركزها $\Omega(1,2,3)$ ونصف قطرها 2.

الحل:

[54] اكتب معادلة الكرة التي مركزها $\Omega(0,0,1)$ وتمر من $A(1,1,1)$.

الحل:

[55] النقطة $A(1,-2,0)$ والمستوي $\mathcal{P}: x+2y+z-1=0$. اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي $\mathcal{P}$.

الحل:

[56] (دورة 1 – 2018) في معلم متجانس، النقطة $A(2,-2,2)$ والمستوي $\mathcal{P}: x+2y+3z=5$. اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي $\mathcal{P}$.

الحل:

[57] (دورة 1 – 2017) جد معادلة الكرة S التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{3}$. و تحقق أن $x-y+z+3=0$ يمس الكرة S.

الحل:

[58] عيّن طبيعة مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ في الحالات الآتية:

ⓐ $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$ ⓑ $x^2+y^2+z^2+x+y+z=0$

ⓒ $x^2+y^2+z^2-10x+2z+26=0$ ⓓ $x^2+y^2+z^2-4x+5=0$

الحل:

[59] نتأمّل النقاط $A(2,3,-1)$ و $B(2,8,-1)$ و $C(7,3,-1)$ و $D(-1,3,3)$. أثبت أنَّ B و C و D تقع على كرة واحدة مركزها A.

الحل:

[60] نتأمّل النقطتين $A(2,1,2)$ و $B(-2,0,2)$.

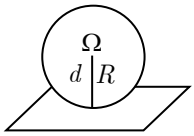
أعطِ معادلة للمجموعة $\mathcal{A}$ المكوّنة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تُحقّق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$. ما طبيعة المجموعة $\mathcal{A}$؟

الحل:

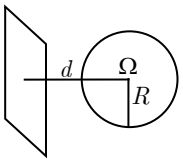
سما المجد التعليمية

15.وضع كرة مع مستو

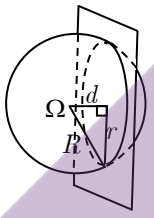
نوجد بعد المركز عن المستوي نقارنه مع نصف القطر $d = dist(\Omega, \mathcal{P})$:



♣ $R = d$ يكون المستوي مماس للكرة.



♣ $R < d$ يكون المستوي خارج للكرة.



♣ $R > d$ يكون المستوي قاطع للكرة بدائرة نصف قطرها r يحقق:

$$d^2 + r^2 = R^2$$

[61] ادرس وضع المستوي $P : 2x - 2y + z = 4$ مع الكرة $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

الحل:

[62] ادرس وضع المستوي $P : 2x - 2y + z + 8 = 0$ مع الكرة $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

الحل:

[63] المستوي $\mathcal{P} : x + y + z = 1$ يقطع الكرة $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$ بدائرة احسب نصف قطرها.

الحل:

16.المستوي المحوري:

لقطعة مستقيمة هو مجموعة النقاط التي تبعد عن طرفيها المسافة نفسها. وهو المستوي الذي يعامد القطعة في المنتصف.

[64] $A(-1,-2,3)$, $B(1,0,-3)$ جد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

الحل:

[65] النقطتان $A(5,2,-1)$ و $B(3,0,1)$. بيّن أيُّ النقاط $C(-2,5,-2)$ أو $E(3,2,1)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

الحل:

[66] جدْ على محور الفواصل نقطةً C متساوية البُعد عن النقطتين $A(2,-1,3)$ و $B(0,5,-1)$.

الحل:

[67] نتأمّل النقطتين $A(2,1,0)$ و $B(-1,4,2)$.

ⓐ أوجد نقطةً متساوية البعد عن A و B.

ⓑ أوجد λ الذي يجعل $C(1,1,\lambda)$ متساوية البعد عن A و B.

ⓒ أثبت أنَّ «$M(x,y,z)$ نقطةٌ من المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ » إذا وفقط إذا تحقَّق الشرط «$3x-3y-2z+8=0$».

الحل:

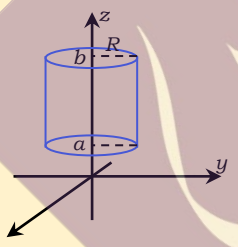
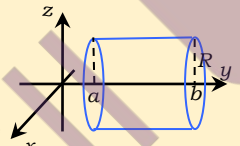
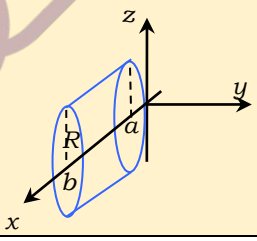
[68] نتأمّل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(0,-1,-1)$.

ⓐ أعطِ معادلة للمجموعة $\mathcal{P}$ المكوّنة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تُحقّق $MA=MB$. ما طبيعة المجموعة $\mathcal{P}$؟

ⓑ أعطِ معادلة للمجموعة $\mathcal{A}$ المكوّنة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تُحقّق $MA=2MB$. ما طبيعة المجموعة $\mathcal{A}$؟

الحل:

17.معادلة الأسطوانة: يوجد ثلاث حالات

محورها $(O,\vec{k})$ ومحصورة بالقاعدتين $(0,0,a)$, $(0,0,b)$ ونصف قطرها R . هي $\begin{cases} a \le z \le b \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}$	
محورها $(O,\vec{j})$ والمحصورة بالقاعدتين $(0,a,0),(0,b,0)$ ونصف قطرها R . هي $\begin{cases} a \le y \le b \\ x^2+z^2=R^2 \end{cases}$	
محورها $(O,\vec{i})$ والمحصورة بالقاعدتين $(a,0,0),(b,0,0)$ ونصف قطرها R . هي $\begin{cases} a \le x \le b \\ z^2+y^2=R^2 \end{cases}$	

[69] جد معادلة للأسطوانة التي محورها $(O,\vec{k})$ وقاعدتيها الدائرتين التي مركزيهما $E(0,0,1)$ و $C(0,0,-2)$ ونصف قطرها 3 .

الحل:

[70] جد معادلة للأسطوانة التي محورها $(O,\vec{j})$ وقاعدتيها الدائرتين التي مركزيهما $A(0,3,0)$ و $O(0,0,0)$ ونصف قطرها 2 .

الحل:

♣ إذا لم يذكر القاعدتين يكون الارتفاع لانهائي أي الشرط الأول من $\mathbb{R}$

[71] جد معادلة الأسطوانة التي محورها $(O,\vec{i})$ ومركز قاعدتها $T(3,0,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

الحل:

[72] صِفْ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحققّ إحداثياتها العلاقات $x^2+y^2=25$ و $1 \le z \le 4$.

الحل:

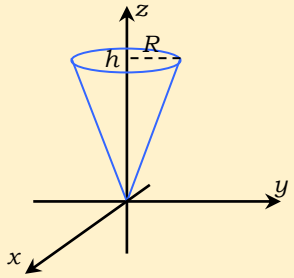
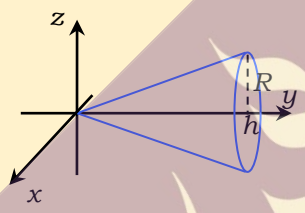
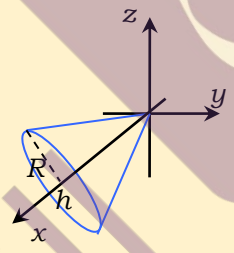
[73] لتكن معادلة الأسطوانة $x^2+y^2=9$ و $0 \le z \le 7$. أيُّ النّقاط تقع على الأسطوانة $E(\sqrt{3},\sqrt{6},4)$ و $F(1,3,1)$ ؟

الحل:

[74] لتكن النقطة $A(0,0,5)$ في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نتأمل الأسطوانة المولّدة من دوران الضلع $[BC]$ من المستطيل $OABC$ حول المستقيم OA حيث $AB=2$. ولتكن $M(x,y,z)$ نقطة متحولة من الأسطوانة، و H مسقطها القائم على القطعة OA . استنتج معادلة الأسطوانة.

الحل:

18.معادلة المخروط: يوجد ثلاث حالات

معادلةً للمخروط الذي رأسه O ومحوره $(O,\vec{k})$ وقاعدته الدائرة مركزها $(0,0,h)$ ونصف قطر قاعدته R هي $\begin{cases}0\le z\le h\\ x^2+y^2=R^2\dfrac{z^2}{h^2}\end{cases}$	
معادلةً للمخروط الذي رأسه O ومحوره $(O,\vec{j})$ وقاعدته الدائرة مركزها $(0,h,0)$ ونصف قطر قاعدته R هي $\begin{cases}0\le y\le h\\ x^2+z^2=R^2\dfrac{y^2}{h^2}\end{cases}$	
معادلةً للمخروط الذي رأسه O ومحوره $(O,\vec{i})$ وقاعدته الدائرة مركزها $(h,0,0)$ ونصف قطر قاعدته R هي $\begin{cases}0\le x\le h\\ z^2+y^2=R^2\dfrac{x^2}{h^2}\end{cases}$	

[75] اكتب معادلةً مخروط رأسه O ومحوره $(O,\vec{i})$ وقاعدته دائرة مركزها $B(4,0,0)$ ونصف قطرها 3.

الحل:

[76] اكتب معادلةً للمخروط الذي رأسه O ومحوره $(O,\vec{k})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $F(0,0,6)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

الحل:

[77] اكتب معادلةً للمخروط الذي رأسه O ومحوره $(O,\vec{j})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $A(0,5,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

الحل:

[78] صِفْ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحققّ إحداثياتها العلاقات $x^2+y^2-\frac{4}{25}z^2=0$ مع $0\le z\le 5$. عيّن من بين النقاط التي تقع على المخروط: $Q(2,0,5)$ و $R(-2,1,5)$.

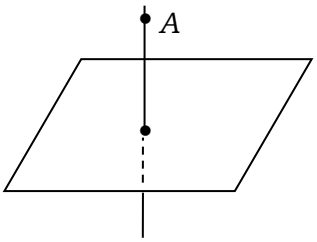
الحل:

[79] لتكن $A(0,0,5)$ في معلم متجانس معطى $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. لنتأمل المخروط المولّد من دوران الضلع $[OK]$ من المثلث OAK القائم في A حول OA مع $AK=2$. لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المخروط، و H مسقطها القائم على القطعة OA.

أثبت أنّ $MH^2=\frac{4}{25}OH^2$. ثم استنتج معادلة المخروط.

الحل:

19.مسقط نقطة على مستو:



- نوجد معادلة المستوي $\mathcal{P}$.
- نوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم المعامد للمستوي $\mathcal{P}$ والمار من A .
- نوجد نقطة التقاطع بالحل المشترك فتكون هي المسقط القائم.

[80] نتأمّل المستوي $\mathcal{P}: x+y+z=1$. جد A' المسقط القائم للنقطة $A(3,-1,1)$ على المستوي $\mathcal{P}$.

الحل:

♣ إذا كان **المستقيم معامد للمستوي** فإن شعاع توجيه المستقيم هو شعاع ناظم للمستوي.

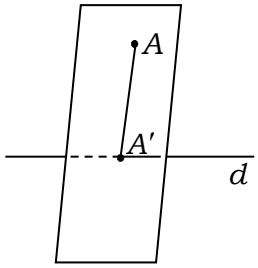
[81] نتأمّل النقاط $A(1,2,0)$ و $B(0,0,1)$ و $C(1,5,5)$. D' المسقط القائم للنقطة $D(-11,9,-4)$ على المستوي (ABC) .

ⓐ اكتب معادلة للمستوي (ABC) .

ⓑ استنتج إحداثيات D' .

الحل:

20. مسقط نقطة على مستقيم:



- نوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم d
- نوجد معادلة المستوي المعامد للمستقيم d والمار من النقطة A
- نوجد نقطة التقاطع بالحل المشترك فتكون هي المسقط القائم.
- **لإيجاد بعد نقطة A عن مستقيم d:**

نوجد بعد النقطة A عن مسقطها A' على المستقيم أي AA'.

[82] لدينا $d:\{x=t,\ y=1-t,\ z=-1+t\ :t\in\mathbb{R}$ والنقطة $A(1,-1,0)$. عين احداثيات A' مرتسم A على d واحسب بعد A عن d.

الحل:

[83] نتأمّل النقاط $A(1,2,0)$ و $B(0,1,1)$ و $C(1,1,-1)$. عين احداثيات A' مسقط A على (CB) واحسب بعد A عن (CB).

الحل:

سما المجد التعليمية

[84] في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا $A(3,-1,2)$، والمستويان

$\mathcal{P}: 2x-y+z-4=0,\ \mathcal{Q}: x+y+2z-5=0$

أثبت تقاطع المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، واحسب بُعد A عن المستقيم d الذي يمثّل فصلهما المشترك.

الحل:

[85] في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا $A(3,-1,2)$، والمستويان

$\mathbb{P}: x-y+z=0,\ \mathbb{Q}: 3x+z-1=0$

ⓐ أثبت تقاطع المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ وهل هما متعامدان.

ⓑ أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d الذي يمثّل فصلهما المشترك.

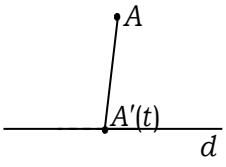
ⓒ أعط معادلة للمستوي $\mathcal{W}$ الذي يعامد المستقيم d (أي يعامد كل من المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$) ويمر من A.

ⓓ استنتج مسقط A على d.

الحل:

سما المجد التعليمية

طريقة ثانية (طريقة نقطة التمثيل الوسيطي)



- نوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم d
- نختر نقطة A' من المستقيم d لها التمثيل الوسيطي.
- نوجد t التي تحقق الشرط $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{u_d}=0$
- نعوض t في التمثيل الوسيطي فنجد المسقط القائم.
- **لإيجاد بعد نقطة A عن مستقيم d**: نوجد بعد النقطة A عن مسقطها A' على المستقيم أي AA'.

[86] لدينا $d:\{x=t,\ y=1-t,\ z=-1+t\ :t\in\mathbb{R}$ والنقطة $A(1,-1,0)$.

عين احداثيات A' مرتسم A على d واحسب بعد A عن d.

الحل:

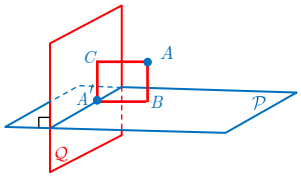
[87] في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا $A(3,-1,2)$، والمستويان $\mathcal{P}:2x-y+z-4=0,\ \mathcal{Q}:x+y+2z-5=0$

أثبت تقاطع المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، واحسب بُعد A عن المستقيم d الذي يمثّل فصلهما المشترك.

الحل:

سما المجد التعليمية

طريقة خاصة (تستعمل إذا كان المستويان متعامدان)



- نوجد بعد النقطة A **عن كل من المستويين.**
- **نستعمل مبرهنة فيثاغورث لنحسب البعد.**

$$AA'^2 = (dist(A,\mathcal{P}))^2 + (dist(A,\mathcal{Q}))^2$$

[88] في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا لنقطة $A(2,1,2)$، والمستويين $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$: $\mathcal{P}: x-z-1=0$, $\mathcal{Q}: x+y+z=0$

① أثبت أنَّ المستويين $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$ متعامدان.

② احسب بُعد النقطة A عن الفصل المشترك للمستويين $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$.

الحل:

[89] لدينا النقطة $A(2,1,2)$، والمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{P}: x+y-2z-1=0,\ \mathcal{Q}: x+y+z=0$$

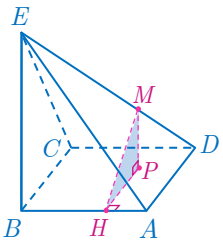
ⓐ أثبت أنَّ المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدان.

ⓑ احسب بُعد A عن كلٍّ من المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

ⓒ استنتج بُعد النقطة A عن الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

الحل:

[90] $ABCDE$ هرمٌ رأسه E وقاعدته مربع. $[BE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$، $EB=4\sqrt{2}$ و $AB=4$.



M نقطة من القطعة $[ED]$ تُحقّق $3\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DE}$. لتكن P المسقط القائم للنقطة M على المستوي $(ABCD)$ و H المسقط القائم للنقطة P على المستقيم (AB). في المعلم المتجانس $(B;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $\overrightarrow{BA}=4\vec{i}$ و $\overrightarrow{BC}=4\vec{j}$ و $\overrightarrow{BE}=4\sqrt{2}\,\vec{k}$.

ⓐ جد إحداثيات كلٍّ من النقطتين D و E و M و P و H.

ⓑ احسب بعد M عن المستقيم (AB)

الحل:

أسما المجد التعليمية

طريقة خاصة (تستعمل إذا كان للنقطتين مسقطين متساويين)

- نوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم d
- نختر نقطة A' من المستقيم d لها التمثيل الوسيطي.
- نحسب أصغر طول AA' فيكون البعد المطلوب.

[91] نتأمّل النقاط $A(1,3,4)$ و $B(5,3,4)$ و $C(4,-1,2)$.

a) أثبت أنّ C لا تقع على المستقيم (AB).

b) M نقطة من المستقيم (AB) جد إحداثيات M بدلالة x.

c) احسب MC^2 بدلالة x. استنتج بُعد C عن (AB).

الحل:

مثال18: حلّ الجملة

$$(S)\begin{cases} x-3y+2z=1 & (L_1)\\ 2x-y+3z=9 & (L_2)\\ 3x-2y+4z=11 & (L_3)\end{cases}$$

الحل18: نستعمل طريقة غاوس:

$$\begin{cases} x-3y+2z=1 & (L_1)\\ 2x-y+3z=9 & (L_2)\\ 3x-2y+4z=11 & (L_3)\end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-3y+2z=1 & (L_1)\\ 5y-z=7 & (-2L_1+L_2=L_2')\\ 7y-2z=8 & (-3L_1+L_3=L_3')\end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3y+2z=1 & (L_1)\\ y-\frac{1}{5}z=\frac{7}{5} & (\frac{1}{5}L_2'=L_2'')\\ 7y-2z=8 & (L_3')\end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-3y+2z=1 & (L_1)\\ y-\frac{1}{5}z=\frac{7}{5} & (L_2'')\\ -\frac{3}{5}z=-\frac{9}{5} & (-7L_2''+L_3'=L_3'')\end{cases}$$

ومنه الحل الوحيد: $S=\{x=1,y=2,z=3\}$

[92] حلّ الجملة الخطية الموافقة وبيّن إذا كانت هذه المستويات تشترك في نقطة فقط، أو في مستقيم مشترك، أو لا تشترك بأية نقطة:

ⓐ $\begin{cases} \mathcal{P}_1: x+y+z=1\\ \mathcal{P}_2: 3x+5y-z=-1\\ \mathcal{P}_3: -x+y+z=1\end{cases}$ ⓑ $\begin{cases} \mathcal{P}_1: 2x-y+3z=0\\ \mathcal{P}_2: x+2y+z=0\\ \mathcal{P}_3: 3x-4y+5z=0\end{cases}$

ⓒ $\begin{cases} \mathcal{P}_1: 5x+y+z=-5\\ \mathcal{P}_2: 2x+13y-7z=-1\\ \mathcal{P}_3: x-y+z=1\end{cases}$ ⓓ $\begin{cases} \mathcal{P}_1: x+y+z=1\\ \mathcal{P}_2: x-2y+z=1\\ \mathcal{P}_3: 3x-4y+3z=-1\end{cases}$

الحل:

21. الوضع النسبي بين ثلاث مستويات

المستويات الثلاث إما تتقاطع في نقطة (إذا نتج حل وحيد) أو تتقاطع في مستقيم (إذا نتج عدد لا نهائي من الحلول ولم يرتبط خطياً ناظمان منها) أو لا تشترك بأية نقطة (إذا لم ينتج حل مشترك).

ولدراسة ذلك يمكن أن نستعمل **طريقة غاوس والتي تستعمل القاعدة:**

–يمكن ضرب معادلة بعدد ما

–نضرب معادلة بعدد ما ونجمعها إلى معادلة لاحقة ونضع الناتج مكان المعادلة المضروبة.

في هذه الطريقة: نجعل أمثال المجهول الأول 1 ثم نصفر تحته. وثم نصفر تحت المجهول الثاني في المعادلة الثانية وهكذا.

سما المجد التعليمية

سما المجد التعليمية

تمارين عامة على الأشعة

[93] لتكن النقاط $A(0,1,1)$ و $B(2,1,\frac{1}{2})$ و $C(0,1,0)$ و $D(1,0,0)$ و $E(1,-1,1)$.

a) هل C,D,B تحدد مستوٍ.

b) جد معادلة المستوي (BDC).

c) اثبت أن المثلث DBC قائم في D واحسب مساحته.

d) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من A ويعامد (BDC).

e) استنتج مسقط A على (BDC)

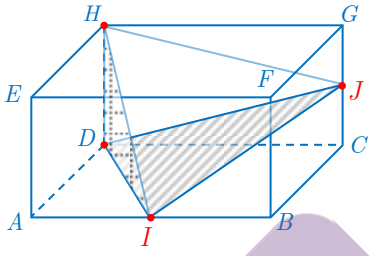
f) احسب بُعد A عن المستوي (DCB).

g) استنتج حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل:

سما المجد التعليمية

[94] ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$. النقطة I هي منتصف $[AB]$ و J هي منتصف $[CG]$. نتأمّل المعلم المتجانس $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



a) جد DJ و IJ و ID.

b) أثبت أنّ (DI) و (IJ) متعامدان.

c) احسب $\cos IJD$.

d) أعط معادلة (DIJ).

e) احسب بُعد H عن (DIJ).

f) احسب حجم رباعي الوجوه $HDIJ$.

g) جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من H ويعامد (DIJ)

h) جد إحداثيات H' نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي (DIJ).

i) استنتج مسقط H على المستوي (DIJ).

j) احسب بُعد J عن المستقيم (IH).

k) جد معادلة الكرة التي مركزها J وتمس المستقيم (IH).

الحل:

سما المجد التعليمية

[95] ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم ولنضع $AB=4$. I و J هما، بالترتيب، منتصفا $[AB]$ و $[CD]$.

ⓐ احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

ⓑ أثبت تعامد المستقيمين (AB) و (CD) .

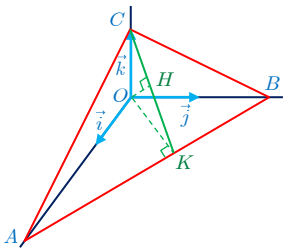
ⓒ ليكن G مركز ثقل المثلث BCD . احسب $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}$ ، واستنتج أنّ (AG) هو الارتفاع النازل من A .

ⓓ أثبت أنّ (IJ) يعامد (CD) .

الحل:

سما المجد التعليمية

[96] نتأمّل رباعي الوجوه $OABC$ ثلاثي الزوايا القائمة رأسه O، أي إنّ المستقيمات (OA) و (OB) و (OC) متعامدة مثنى مثنى. لنفترض أنّ $OC=1$ و $OB=2$ و $OA=2$.



نختر معلماً متجانساً $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ مع $\vec{i}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ و $\vec{j}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ و $\vec{k}=\overrightarrow{OC}$.

a) جد معادلة المستوي (ABC)

b) جد تمثيل وسيطي للمستقيم المار من O والمعامد لـ (ABC)

c) احسب إحداثيات H إلى المسقط القائم للنقطة O على (ABC).

d) احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BH}$ ماذا نسمي H في ABC.

الحل:

[97] A و B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة من الفراغ. و D و E نقطتان تحققان: $3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CE}$.

ⓐ أثبت أنَّ النقاط A و B و C و D و E تقع في مستوٍ واحد.

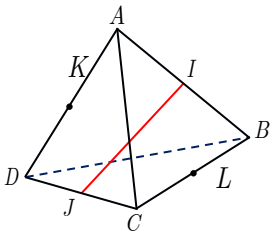
ⓑ لتكن I منتصف $[CD]$ و J منتصف $[BE]$. أثبت وقوع A و I و J على استقامة واحدة.

الحل:

سما المجد التعليمية

تمارين عامة محلولة

[98] $ABCD$ رباعي وجوه. فيه I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ و O منتصف $[IJ]$.



① أثبت أنّ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

② أثبت أنّ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$

③ أثبت أنّ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

④ لتكن K منتصف $[AD]$، و L منتصف $[BC]$. أثبت أنّ $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. استنتج أنّ $ILJK$ متوازي أضلاع.

الحل: ① نستعمل علاقة شال نجد

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$$

② لدينا $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{BD}$

بالجمع نجد:

$$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$$
$$2\overrightarrow{IJ}+\underbrace{\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}}_{\vec{0}}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$$
$$2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$$

③ بحسب قاعدة متوازي الأضلاع أو متوسط المثلث نجد

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OJ}$ بالجمع نجد

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OJ}=2(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ})=\vec{0}$$

④ نعلم أن القطعة المستقيمة المحدودة بمنتصفي ضلعين في مثلث يوازي الثالثة ويساوي نصف طولها أي: $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. وبالتالي $\overrightarrow{LJ}=\overrightarrow{IK}$ ومنه $ILJK$ متوازي الأضلاع.

[99] في المقولات الآتية، بيّن الصحيح من الخطأ معللاً إجابتك.

① ABC مثلّث. مهما كانت D من الفراغ كانت الأشعة $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DC}$ مرتبطة خطياً.

② $ABCD$ رباعي الوجوه. لتكن I النقطة المعرّفة بالعلاقة $2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$. عندئذ تقع I على أحد حروف $ABCD$

③ نتأمّل الأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$. نفترض أنّ أي شعاعين منها ليسا مرتبطين خطياً، عندها تكون الأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطة خطياً.

الحل: ① خطأ، فإذا كانت D خارج المستوي (ABC) كانت الأشعة غير مرتبطة خطياً.

② صحيحة لأنه بالاستفادة من العلاقة المعطاة نجد

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}$$
$$=-\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)=-2\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{IA}$$

وبالتالي I منتصف الحرف BD.

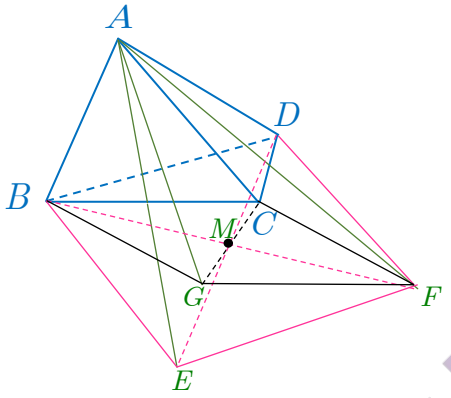
③ خطأ فمثلاً في المثلث ABC الأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$. يكون أي شعاعين منها ليسا مرتبطين خطياً، ولكن الأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً.

[100] $ABCD$ رباعي وجوه. و E و F و G نظائر A بالنسبة إلى منتصفات $[BC]$ و $[CD]$ و $[DB]$.

① أثبت أنّ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BE}$.

② استنتج أنّ للقطعتين $[DE]$ و $[FB]$ المنتصف نفسه.

③ أثبت أنّ المستقيمات (BF) و (DE) و (CG) متلاقية في نقطة.



الحل: ① باستعمال خواص متوازي الأضلاع $ABEC$ و $ACFD$ حيث قطراهما متناصفان $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DF}$

② من الطلب السابق $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BE}$ والرباعي $BEFD$ متوازي الأضلاع فقطراه $[DE]$ و $[FB]$ متناصفان.

③ باستعمال خواص متوازي الأضلاع $ABGD$ و $ACFD$ حيث قطراهما متناصفان وبالتالي $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BG}$ والرباعي $BGFC$ متوازي الأضلاع فقطراه $[DE]$ و $[CG]$ متناصفان.

أي المستقيمات (BF) و (DE) و (CG) تتلاقى في نقطة واحدة.

[101] ليكن α عدداً حقيقياً، ولنتأمّل النقاط الثلاث $A(3,1,-3)$ و $B(-1,5,-3)$ و $C(-1,1,\alpha)$. أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين، أيّاً كان α. أيمكن أن يكون متساوي الأضلاع ؟

الحل:

$$CB=\sqrt{4^2+(-3-\alpha)^2}=\sqrt{25+\alpha^2+6\alpha}$$
$$CA=\sqrt{4^2+(3-\alpha)^2}=\sqrt{25+\alpha^2+6\alpha}$$

وبالتالي مهما تكن α من $\mathbb{R}$ فإن $CA=CB$ والمثلث متساوي الساقين رأسه C.

حتى يكون هذا المثلث متساوي الأضلاع يجب أن يكون $CB=AB$

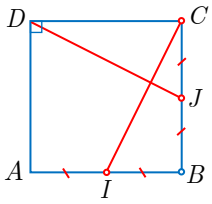
أي $\sqrt{25+\alpha^2+6\alpha}=\sqrt{4^2+4^2}$

ومنه نجد $\alpha^2+6\alpha-7=0$ ولهذه المعادلة حلان $\alpha=1$ أو $\alpha=-7$. وعند القيمتين يمكن أن يكون المثلث متساوي الأضلاع .

[102] $M(m,1,3)$ مربّع. I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[BC]$.

أثبت أنّ المستقيمين (DJ) و (CI) متعامدان.

الحل:



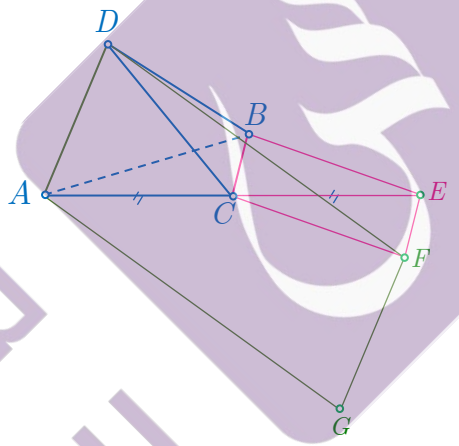
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{DJ}&=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI})\cdot(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CJ})\\&=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CJ}\\&\quad+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CJ}\\&=0+\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}+0=0\end{aligned}$$

[103] $ABCD$ رباعي وجوه. و E هي نظيرة A بالنسبة إلى C، و F و G تجعلان $EBCF$ و $FDAG$ متوازيي الأضلاع.

① أثبت أنّ $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BC}$.

② استنتج أنّ $\overrightarrow{DG}=2\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$، ثُمّ أنّ النقاط B و C و D و G تقع في مستوٍ واحد.

الحل: ① نكتب



$$\begin{aligned}&\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}\\&=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DG}\end{aligned}$$

② لدينا

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DC}$$

لأن C منتصف $[AE]$ واستناداً إلى ① نجد

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DG}&=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BC}\\&=2\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

أي $\overrightarrow{DG},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}$ مرتبطة خطياً فالنقاط B و C و D و G تقع في مستوٍ واحد.

[104] نتأمّل النقاط $A(3,2,1)$ و $B(1,2,0)$ و $C(3,1,-2)$.

① أثبت أنّ النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

② عند أية قيمة للوسيط m تنتمي $M(m,1,3)$ إلى (ABC)؟

③ ما العلاقة بين x و y لتقع النقاط A و B و C و $D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد؟

الحل: ① لدينا في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $\overrightarrow{AB}(-2,0,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,-1,-3)$ فالشعاعان غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة والنقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

② تنتمي $M(m,1,3)$ إلى المستوي (ABC) إذا وجد عددان حقيقيان a و b يحققان العلاقة

$$\overrightarrow{AM}=a\cdot\overrightarrow{AB}+b\cdot\overrightarrow{AC}$$

أي $(m-3,-1,2)=a(-2,0,-1)+b(0,-1-3)$ ومنه

$$\begin{cases}m-3=-2a\\-1=-b\\2=-a-3b\end{cases}$$

وبالحل المشترك نجد $b=1$ و $a=-5$ ومن ثَمّ $m=13$.

③ تقع النقاط A و B و C و D حيث $D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد إذا وجد عددان حقيقيان α و β يحققان العلاقة $\overrightarrow{AD}=\alpha\cdot\overrightarrow{AB}+\beta\cdot\overrightarrow{AC}$ ومنه

$$\begin{cases}x-3=-2\alpha & (1)\\y-2=-\beta & (2)\\2=-\alpha-3\beta & (3)\end{cases}$$

من المعادلتين (1),(2) نجد $\beta=-y+2$ و $\alpha=\dfrac{-x+3}{2}$ وبالتعويض في (3) نجد $x+6y=19$.

[105] لتكن $\mathcal{E}$ مجموعة النقاط M x,y,z التي تحققُ إحداثياتها العلاقة : $x-2y+3z-5=0$.

① أثبت أنّ $A(7,1,0)$ و $B(5,0,0)$ و $C(2,0,1)$ تنتمي إلى $\mathcal{E}$.

② أثبت أنّ النقاط A و B و C تحدّد مستوياً $\mathcal{P}$.

③ أثبت أنّ مركّبات الشعاع $\overrightarrow{BM}$ هي $(2y-3z,y,z)$. واستنتج أنّ $\overrightarrow{BM}=y\overrightarrow{BA}+z\overrightarrow{BC}$. ماذا تستنتج؟

④ بالعكس، أثبت أنّ أية نقطة M x,y,z من المستوي $\mathcal{P}$ تحقق المعادلة: $x-2y+3z-5=0$ ما هي المجموعة $\mathcal{E}$؟

الحل: ① مجموعة النقاط $\mathcal{E}$ هي نقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق إحداثياتها العلاقة $x-2y+3z-5=0$. نلاحظ أن إحداثيات النقاط A و B و C تحقق العلاقة المعطاة إذن النقاط A و B و C هي نقاط من المجموعة $\mathcal{E}$.

② لما كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}(-2,-1,0)$ و $\overrightarrow{AC}(-5,-1,1)$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة كانت النقاط A و B و C غير واقعة على استقامةٍ واحدة فهي تحدد مستوياً $\mathcal{P}$.

③ من جهة أولى $\overrightarrow{BM}=(x-5,y,z)$ ولأن النقطة M من $\mathcal{E}$ فإن $x-2y+3z-5=0$ ومنه $x-5=2y-3z$

$\overrightarrow{BM}=(2y-3z,y,z)$.

وبما أن $(2y-3z,y,z)=y(2,1,0)+z(-3,0,1)$ فإن $\overrightarrow{BM}=y\overrightarrow{BA}+z\overrightarrow{BC}$. ومنه النقاط A و B و C و M تقع في مستوٍ واحد $\mathcal{P}$.

④ وبالعكس. إذا كانت النقطة M تقع في المستوي $\mathcal{P}$ يوجد عددان حقيقيان α و β يحققان العلاقة: $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$.

ولدينا $\overrightarrow{AM}=(x-7,y-1,z)$ إذن

$$\begin{pmatrix} x-7 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

أي

$$\begin{cases} x-7 = -2\alpha - 5\beta & (1) \\ y-1 = -\alpha - \beta & (2) \\ z = \beta & (3) \end{cases}$$

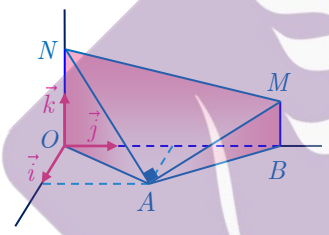
بحساب α و β من المعادلتين (2),(3) ثُم بالتعويض في (1) نجد

$x-7 = 2(y+z-1) - 5z$

أو $x-2y+3z-5=0$ إذن M تنتمي إلى E . وهكذا نكون قد أثبتنا أن $\mathcal{P} \in \mathrm{E}$.

[106] m و n عددان حقيقيان موجبان يُحقِّقان $n > m > 0$. نتأمّل $A(\sqrt{3},3,0)$ و $B(0,6,0)$ و $M(0,6,m)$ و $N(0,0,n)$ في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. عيّن m و n ليكون

- المثلث MAN قائماً في A
- حجمُ المجسَّم $AOBMN$ يساوي $5\sqrt{3}$.



الحل: لنحسب أطوال أضلاع المثلث NAM . لدينا

$NA^2 = 3+9+n^2 \quad = n^2+12$

$MA^2 = 3+9+m^2 \quad = m^2+12$

$NM^2 = 0+36+(m-n)^2 = 36+(m-n)^2$

يكون المثلث NAM قائم في A إذا تحقق الشرط $NM^2 = NA^2 + MA^2$ وهذا يعني: ① $m \cdot n = 6$

ولما كان حجم الهرم يساوي $5\sqrt{3}$ فإن

$$V = \frac{1}{3} \cdot S(OBMN) \cdot h = 5\sqrt{3}$$

ولكن $S(OBMN) = \dfrac{m+n}{2} \cdot 6 = 3(m+n)$

ومنه $5\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 3(m+n) \cdot \sqrt{3}$ أي ② $m+n=5$

وبحل ① و ② نجد $m=2$ و $n=3$.

[107] لدينا في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان $A(2,-1,2)$ و $B(-2,1,-2)$. نقرن بكل نقطة $M(x,y,z)$ ، من الفراغ، المقدار $f(M) = MA^2 + MB^2$.

① احسب $f(M)$ بدلالة x و y و z .

② أثبت أنَّ مجموعة النقاط M التي تحقّق $f(M)=18$ مؤلفة من نقطة واحدة.

③ أثبت أنَّ مجموعة النقاط M التي تحقّق $f(M)=30$ كرةٌ مركزها O . أوجد نصف قطرها.

④ أثبت أنَّه، وفق شرط على k ، مجموعة النقاط M المحققة للعلاقة $f(M)=k$ هي كرة مركزها O .

الحل: ① لدينا $MA^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2$

و $MB^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2$ ومنه

$f(M) = MA^2 + MB^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 18$

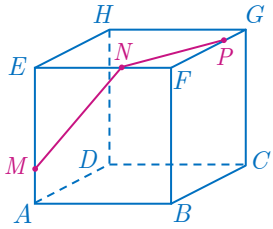
② $f(M)=18$ إذا وفقط إذا كان $x^2+y^2+z^2=0$ أي $(x,y,z)=(0,0,0)$.

③ $f(M)=30$ يكافئ $x^2+y^2+z^2=6$ يكافئ انتماء M إلى الكرة التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

④ $f(M)=k$ إذا وفقط إذا كان $x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{2}(k-18)$ ومنه عندما $k>18$ نجد أن مجموعة النقاط M المحققة للعلاقة $f(M)=k$ هي كرة مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{\frac{1}{2}(k-18)}$.

[108] $ABCDEFGH$ مكعب.

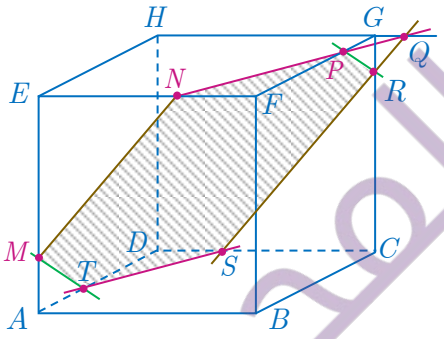
M و N و P ثلاث نقاط من الأحرف $[AE]$ و $[EF]$ و $[FG]$ بالترتيب، جد مقطع المكعب بالمستوي (MNP) .



الحل: (MNP) يقطع $(DCGH)$ بفصل مشترك يوازي (MN) .

و يقطع $(ABCD)$ بفصل مشترك يوازي NP .

لتعيين الفصل المشترك للمستويين (MNP) و $(DCGH)$ نحتاج إلى نقطة مشتركة بينهما. لتكن Q نقطة تقاطع المستقيمين (HG) و (PN) فهي نقطة مشتركة بين المستويين (MNP) و $(DCGH)$. فيكون الفصل المشترك المطلوب هو المستقيم المار بالنقطة Q ويوازي (MN) وهو يقطع (CG) في R ويقطع (CD) في S فالفصل المشترك هو (SR) .

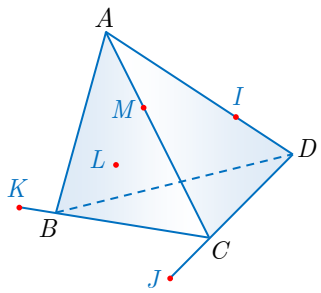


S نقطة مشتركة بين المستويين (MNP) و $(ABCD)$ فالمستقيم المار بالنقطة S موازياً (NP) هو الفصل المشترك للمستويين السابقين فيقطع (AD) في T فالفصل المشترك هو (ST) .

الفصل المشترك للمستويين (MNP) و $(BCGF)$ هو (PR) .

الفصل المشترك للمستويين (MNP) و $(ADHE)$ هو (MT) .

[109] نتأمّل رباعي الوجوه



$ABCD$ رباعي وجوه.

① M نقطةٌ من الحرف $[AC]$.

جد مقطع رباعي الوجوه بالمستوي المار بالنقطة M موازياً للمستوي (BCD).

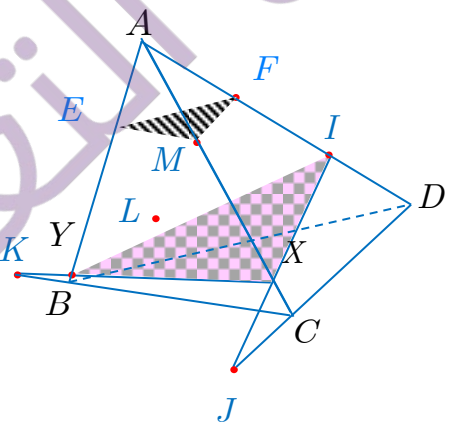
② I نقطةٌ من الحرف $[AD]$،

و J نقطةٌ من المستقيم (CD)، و K نقطةٌ من (BC). عيّن مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (IJK).

③ L نقطةٌ من المستوي (ABD). أوجد مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (KJL).

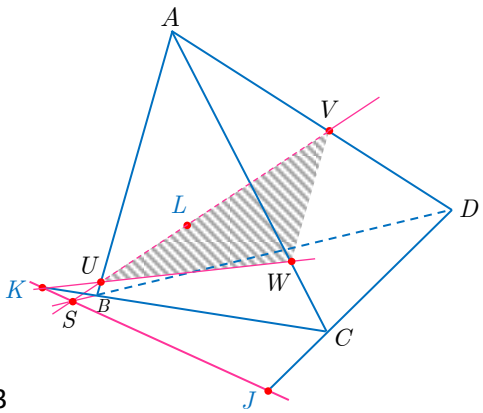
الحل: ① ليكن $\mathcal{P}$ المستوي المار بالنقطة M والموازي للمستوي (BCD) فيكون الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و (ACD) موازي للمستقيم (CD) وكذلك يكون الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و (ABC) موازي للمستقيم (BC). نرسم من M مستقيمين (ME) يوازي (BC) و (MF) يوازي (CD) فيكون $\mathcal{P}$ المستوي الذي يعينه المستقيمان المتقاطعان (ME) و (MF). فيكون المقطع المطلوب هو المثلث MEF.

② النقطة I تنتمي إلى المستقيم (AD) المحتوى في المستوي (ACD) والنقطة J تنتمي إلى المستقيم (CD) المحتوى في المستوي (ACD) إذن المستقيم (IJ)



محتوى في (ACD) وهو وضوحاً محتوى في (IJK). إذن (IJ) هو الفصل المشترك للمستويين (ACD) و (IJK).

المستقيم (IJ) يقطع (AC) في X. ونجد بنفس الاسلوب أن (KX) هو الفصل المشترك للمستويين (ABC) و (IJK). وهذا الفصل المشترك يقطع (AB) في Y. وهكذا يكون مقطع رباعي الوجوه



مع (IJK) هو المثلث (IXY).

③ لتكن S نقطة تقاطع المستقيمين (BD) و (KJ) من المستوي . النقطة S تنتمي إلى (JK) المحتوى في (LKJ) و S تنتمي إلى (BD) المحتوى في (ABD). وكذلك تنتمي L إلى كل من (LKJ) و (ABD). فالمستقيم (SL) هو الفصل المشترك للمستويين (LKJ) و (ABD).

المستقيم (SL) يقطع (AB) و (AD) في U و V. المستقيم (KU) هو الفصل المشترك للمستويين (LKJ) و (ABC) وهو يقطع (AC) في W. المثلث UVW هو مقطع (LKJ) ورباعي الوجوه $ABCD$.

[110] ① بيّن أزواج الأشعة المتعامدة من بين الأشعة الآتية:

$\vec{u}(2,5)$ و $\vec{v}(-2,-5)$ و $\vec{w}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)$.

② اكتب معادلة لمحور القطعة $[AB]$: حيث $A(4,1)$ و $B(-1,2)$

③ نتأمّل النقاط $A(-5,2)$ و $B(1,-1)$ و $C(-3,3)$ و $E\left(-\frac{9}{4},-1\right)$. أتكون النقطة E متساوية البُعد عن المستقيمات التي تؤلّفها أضلاع المثلث ABC ؟

الحل: ① بالحساب نجد $\vec{s}\cdot\vec{u}=0$ ، $\vec{w}\cdot\vec{v}=0$ ، $\vec{w}\cdot\vec{u}=0$.

② نختار $\overrightarrow{AB}(-5,1)$ ناظم على المحور والنقطة $D\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ هي منتصف $[AB]$ فتكون المعادلة من الشكل $ax+by+c=0$ حيث $\vec{n}(a,b)$ ناظم على المحور بالتعويض نجد $-5x+y+c=0$ نعوض النقطة نجد $-5x+y+6=0$

③ معادلة (AB): $m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{3}{-6}=-\frac{1}{2}$ وهذا المستقيم يمر من $B(1,-1)$

المعادلة من الشكل: $y-y_0=m(x-x_0)$ نعوض

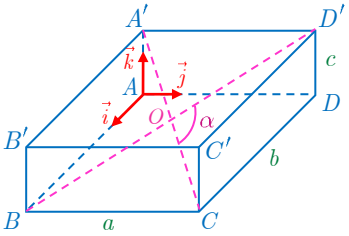
$y+1=-\frac{1}{2}(x-1)$ أي $x+2y+1=0$ ومنه بعد النقطة E عن المستقيم (AB) هو $\text{dist}(E,(AB))=\frac{\left|-\frac{9}{4}-2+1\right|}{\sqrt{1+4}}=\frac{13}{4\sqrt{5}}$

معادلة (AC): $m_{AC}=\frac{1}{2}$ وهذا المستقيم يمر من C أي $x-2y+9=0$ ومنه بعد النقطة E عن المستقيم (AC) يساوي

$$\text{dist}(E,(AC))=\frac{\left|-\frac{9}{4}+2+9\right|}{\sqrt{1+4}}=\frac{35}{4\sqrt{5}}$$

أي $\text{dist}(E,(AC))=\frac{35}{4\sqrt{5}}\neq\text{dist}(E,(AB))=\frac{13}{4\sqrt{5}}$ فتكون النقطة E غير متساوية البعد عن المستقيما ت التي تؤلّفها أضلاع المثلث ABC.

[111] $ABCDA'B'C'D'$ متوازي مستطيلات. يتقاطع قطراه $[BD']$ و $[CA']$ في O. نضع $\alpha = COD'$، ونفترض أنّ $BC = a$ و $CD = b$ و $DD' = c$. نهدف في هذه المسألة إلى حساب $\cos\alpha$. نختار معلماً متجانساً $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ بحيث يكون $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{i}$ مرتبطين خطّياً، و $\overrightarrow{AD}$ و $\vec{j}$ مرتبطين خطّياً، وكذلك $\overrightarrow{AA'}$ و $\vec{k}$ مرتبطين خطّياً.



① أعط إحداثيات جميع رؤوس متوازي المستطيلات ومركزه O.

② أثبت أنّ $\cos\alpha = \dfrac{a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$. ادرس حالة المكعّب.

الحل:

① في المعلم المتجانس $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نجد:

$A(0,0,0)$, $B(b,0,0)$, $C(b,a,0)$, $D(0,a,0)$

$A'(0,0,c)$, $B'(b,0,c)$, $C'(b,a,c)$, $D'(0,a,c)$

النقطة O منتصف القطر $[A'C]$ إحداثياتها: $O(\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{c}{2})$.

② $\overrightarrow{OC} = \left(\frac{b}{2},\frac{a}{2},-\frac{c}{2}\right)$ و $\overrightarrow{OD'} = \left(-\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{c}{2}\right)$

$$\|\overrightarrow{OC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \|\overrightarrow{OD'}\|$$

و $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD'} = \frac{1}{4}(a^2-b^2-c^2)$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD'}}{\|\overrightarrow{OC}\|\,\|\overrightarrow{OD'}\|} = \frac{a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

عندما يكون متوازي المستطيلات مكعب يصبح $a=b=c$ فيكون $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

[112] احسب بُعد A عن المستوي $\mathbb{P}$:

① $A(1,2,-3)$ و $\mathbb{P}: 2x-y+z+1=0$.

② $A(-1,1,1)$ و $\mathbb{P}$ هو المستوي المار بالنقاط $B(0,1,0)$ و $C(-1,1,0)$ و $D(-1,-2,-3)$.

الحل:

① بعد A عن المستوي $\mathcal{P}$ هو :

$$\text{dist}(A,\mathcal{P}) = \frac{|2-2-3+1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

② لدينا $\overrightarrow{BD} = (-1,-3,-3)$ و $\overrightarrow{BC} = (-1,0,0)$ نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BD}$ غير مرتبطين خطياً، فهما يحددان المستوي (BCD). نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$، ونختار $c=1$ عندئذٍ ، ويكون $\overrightarrow{BC}\perp\vec{n}$ أي $\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=0$ ومنه $-a=0$

ويكون $\overrightarrow{BD}\perp\vec{n}$ أي $\overrightarrow{BD}\cdot\vec{n}=0$ ومنه $-a-3b-3=0$

وبالحل المشترك نجد $\vec{n}(0,-1,1)$ ومنه : نحصل على معادلة المستوي (BCD) : $y-z-1=0$ ومنه

$$\text{dist}(A,(BCD)) = \frac{|1-1-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

[113] لدينا النقطة $A(2,2,-1)$ ، والمستويين $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$:

$\mathbb{P}: x-y+z=0$ $\mathbb{Q}: 3x+z-1=0$

احسب بُعد A عن المستقيم d الذي يمثّل الفصل المشترك للمستويين $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$.

الحل:

$A'(a,b,c)$ مسقط A على الفصل المشترك للمستويين $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$

ومنه ① $a-b+c=0$ و ② $3a+c-1=0$

نجد تمثيل وسيطي للفصل المشترك بفرض $z=t$

$x-y+t=0$ و $3x+t-1=0$

ومنه $x=-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}$ و $y=-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}+t=\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}$

اصبح لدينا $d:\begin{cases}x=-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}\\ y=\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}\\ z=t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

ومنه شعاع التوجيه للمستقيم d هو $\vec{v}\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$ أو $\vec{v}(-1,2,3)$

وايضاً $\overrightarrow{AA'}\perp\vec{v}$ و $\overrightarrow{AA'}(a-2,b-2,c+1)$ أي $\overrightarrow{AA'}.\vec{v}=0$

$$-a+2+2b-4+3c+3=0$$

$$-a+2b+3c+1=0 \quad ③$$

بحل ① ② ③ نجد : من ② نجد $c=1-3a$ و من ① نجد $b=c+a=1-2a$ نعوض في ③

$$-a+2(1-2a)+3(1-3a)+1=0$$

$$-a+2-4a+3-9a+1=0$$

$$a=\frac{3}{7}$$

أي $A'(\frac{3}{7},\frac{1}{7},-\frac{2}{7})$ ويكون $AA'=3\sqrt{\frac{5}{7}}$

[114] أثبت في حالة أربع نقاط A و B و C و D من المستوي أنّ:

$$2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = AB^2-BC^2+CD^2-DA^2$$

الحل:

من الخاصة $\vec{u}^2-\vec{v}^2=(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$. نجد

$$AB^2-BC^2 = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$$

$$CD^2-DA^2 = (\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})$$

وبالجمع بعد ملاحظة أنّ $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{BD}$ نجد

$$AB^2-BC^2+CD^2-DA^2 = \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})$$

$$= \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{BD}) = 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$$

[115] نتأمّل المستويين $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$: $\mathbb{P}: x-2y+3z-5=0$ و $\mathbb{Q}: x+y+z+1=0$

① علّل كون المستويين $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$ متقاطعين. نرمز بالرمز d إلى فصلهما المشترك.

② أثبت أنّ d هو مجموعة النقاط $M\left(-\frac{5}{3}z+1,\frac{2}{3}z-2,z\right)$ عندما تتحوّل z في $\mathbb{R}$.

③ أعطِ شعاعاً موجّهاً للمستقيم d.

④ اكتب معادلة للمستوي $\mathbb{R}$ العمودي على كل من $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$ ويمر بالنقطة $A(2,5,-2)$.

الحل: لدينا $P: x-2y+3z-5=0$ و $Q: x+y+z+1=0$

① $\vec{n}_{\mathbb{P}}(1,-2,3)$ و $\vec{n}_{\mathbb{Q}}(1,1,1)$ غير مرتبطان خطياً لعدم تناسب المركبات أي $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$ متقاطعان.

② تنتمي $M(x,y,z)$ إلى المستقيم d إذا حققت إحداثياتها معادلتي المستويين $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$ أي:

$$\begin{cases} x-2y=5-3z & (1) \\ x+y=-1-z & (2) \end{cases}$$

وبالحل $y=\frac{2}{3}z-2$ و $x=1-\frac{5}{3}z$. أي d هو مجموعة النقاط $M\left(1-\frac{5}{3}z,\frac{2}{3}z-2,z\right)$ عندما z من $\mathbb{R}$.

③ نختار نقطتين من d. لذلك نفرض $z=0$ نجد $C(1,-2,0)$ من d وكذلك نفرض $z=3$ نجد $B(-4,0,3)$ من d. ومنه الشعاع الموجه $\vec{u}=\overrightarrow{CB}=(-5,2,3)$ للمستقيم d.

④ المستوي $\mathcal{W}$ عمودي على كل من $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$ فهو عمودي على فصلهما المشترك d ويقبل $\vec{u}$ ناظماً.

لإيجاد المستوي $\mathcal{W}$ نختار النقطة $M(x,y,z)$ من $\mathcal{W}$ فيكون $\vec{u}\perp\overrightarrow{AM}$ أي $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$

أي $5x-2y-3z-6=0$.

[116] نتأمّل النقاط: $A(2,1,3)$ و $B(1,0,-1)$ و $C(4,0,0)$ و $D(0,4,0)$ و $E(1,-1,1)$

① أثبت أنّ النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

② أثبت أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE).

الحل:

① نلاحظ أن $\overrightarrow{CD}=(-4,4,0)$ و $\overrightarrow{CE}=(-3,-1,1)$ غير مرتبطين خطياً فالنقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

② لدينا $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-4)$ وكذلك

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(-1)(-4)+(-1)(4)+0=0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=(-1)(-3)+(-1)(-1)+(-4)(1)=0$

ومنه $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CE}$ أي (AB) عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي (CED) فهو عمودي على (CED).

[117] نتأمّل النقطتين $\Omega(2,-1,3)$ و $A(-1,0,1)$. نهدف إلى كتابة معادلة للكرة $\mathbb{S}$ التي مركزها Ω وتمر بالنقطة A.

① احسب ΩA.

② $M(x,y,z)$ من الفراغ احسب ΩM^2 بدلالة x و y و z.

③ أثبت أنّ « $M(x,y,z)$ نقطةٌ من $\mathbb{S}$ » إذا وفقط إذا تحقّق « $\Omega M^2=\Omega A^2$ » واستنتج معادلة للكرة $\mathbb{S}$.

الحل: ① $\Omega A=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$.

② $\Omega M^2=(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2$

③ نصف قطر الكرة هو $R=\Omega A=\sqrt{14}$.

$M\in\mathbb{S}$ يكافئ $\Omega M=R$ يكافئ $\Omega M^2=\Omega A^2$، يكافئ $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=14$.

[118] نتأمّل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ. نضع $r=\frac{1}{2}AB$، ونعرّف I منتصف $[AB]$.

① أثبت أنّه في حالة نقطة ما M من الفراغ تتحقّق المساواة: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-r^2$.

② أثبت أنّ مجموعة نقاط الفراغ التي تحقّق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ هي الكرة التي مركزها I ونصف قطرها r، وهي أيضاً الكرة التي تقبل $[AB]$ قطراً فيها.

الحل:

① لدينا I منتصف $[AB]$ و $r=\frac{1}{2}AB=IA$ ومنه

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})$

$=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=\overrightarrow{MI}^2-r^2$

② العلاقة $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ تعني $MI^2=r^2$ وهذا تعريف الكرة أي مجموعة النقاط M التي تحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ هي الكرة التي مركزها I ونصف قطرها r ويكون من ثَم AB قطر فيها.

[119] ليكن $ABCD$ رباعي وجوه و k عدد حقيقي غير معدوم ولا يساوي 1. لتكن I و J و K و L النقاط المعرفة بالعلاقات:

$\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AJ}=k\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CK}=k\overrightarrow{CD}$

و $\overrightarrow{CL}=k\overrightarrow{CB}$.

❶ أثبت أنّ $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{LK}$ واستنتج أنّ النقاط الأربع I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد.

❷ ما طبيعة الشكل الرباعي $IJKL$؟

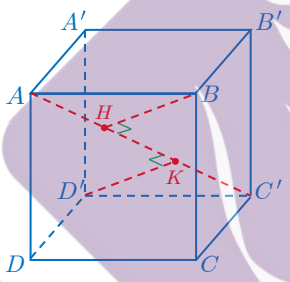
الحل:

❶ $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AD}$
$= k(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = k\overrightarrow{BD}$...①
$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CK} = -k\overrightarrow{CB} + k\overrightarrow{CD}$
$= k(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = k\overrightarrow{BD}$...②

من ① و ② نجد $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{LK}$ أي $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ أي إن المستقيم (IJ) يوازي (LK) النقاط الأربع I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد.

❷ بما أن $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ فإن الشكل $IJKL$ متوازي أضلاع.

[120] ليكن $ABCDA'B'C'D'$ مكعّباً طول حرفه a. النقطة H هي المسقط القائم للرأس B على المستقيم (AC'). نريد إثبات أنّ النقطة H هي أيضاً المسقط القائم لكلٍّ من A' و D على المستقيم (AC').



سنستعمل المعلم المتجانس $D';\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ حيث $\overrightarrow{D'D} = a\vec{i}$ و $\overrightarrow{D'C'} = a\vec{j}$ و $\overrightarrow{D'A'} = a\vec{k}$

① اكتب في هذا المعلم إحداثيات رؤوس المكعب.

② لحساب (x,y,z) إحداثيات النقطة H:

a. اكتب بدءاً من المساواة $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC'} = 0$، علاقة بين x و y و z و a.

b. اكتب علاقة بين بين x و y و z و a و λ حيث λ معرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{AC'}$. واستنتج قيمة λ ثُمّ احداثيات H.

③ لإثبات أنّ المسقط القائم للنقطة A' على (AC') هي النقطة H ذاتها، يكفي أن نثبت أنّ $(A'H)$ عمودي على (AC'). أثبت تعامد الشعاعين $\overrightarrow{A'H}$ و $\overrightarrow{AC'}$.

④ أثبت أنّ المسقط القائم للنقطة D على (AC') هي H ذاتها.

⑤ لتكن K المسقط القائم للنقطة D' على (AC').

a. ماذا تقول عن الطول $C'K$ ؟

b. حدّد موقع K على المستقيم (AC').

c. ما هي النقاط الأخرى من المكعب التي مسقطها القائم على (AC') هي النقطة K ذاتها.

الحل:

① المعلم المفترض $(D';\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متجانس. إحداثيات رؤوس المكعب في هذا المعلم

$D'(0,0,0)$, $D(a,0,0)$, $C(a,a,0)$, $C'(0,a,0)$
$A'(0,0,a)$, $A(a,0,a)$, $B(a,a,a)$, $B'(0,a,a)$

②a. لدينا $\overrightarrow{AC'}(-a,a,-a)$ و $\overrightarrow{BH}(x-a,y-a,z-a)$ والشرط $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC'} = 0$ يُكافئ :

$$x - y + z - a = 0 \quad (*)$$

②b. من الفرض لدينا $\overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{AC'}$

ومنه $(x-a,y,z-a) = \lambda(-a,a,-a)$ أي

$$z = a - \lambda a, \quad y = \lambda a, \quad x = a - \lambda a$$

نعوض في العلاقة $(*)$ فنجد $-3a\lambda = -a$ ومنه $\lambda = \frac{1}{3}$، ينتج إحداثيات $H(\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a)$.

③ لدينا $\overrightarrow{AC'}(-a,a,-a)$, $\overrightarrow{A'H}(\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}a,-\frac{1}{3}a)$

إذن $\overrightarrow{A'H}\cdot\overrightarrow{AC'} = 0$ ومنه $\overrightarrow{A'H} \perp \overrightarrow{AC'}$،

فالمستقيمان (AC') و $(A'H)$ متعامدان.

إذن H هي المسقط القائم للنقطة A' على (AC')

④ لدينا $\overrightarrow{AC'}(-a,a,-a)$, $\overrightarrow{DH}(-\frac{1}{3}a,\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a)$ إذن $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC'} = 0$ ومنه $\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AC'}$، فالمستقيمان (AC') و (DH) متعامدان. إذن H هي المسقط القائم للنقطة D على (AC').

⑤ مركز المكعب O هو مركز تناظر للشكل، والتناظر المركزي S_O يحافظ على المسافات والتعامد. لمّا كان $S_O(B) = D'$ و $S_O(A) = C'$ كان $S_O(H) = K$.

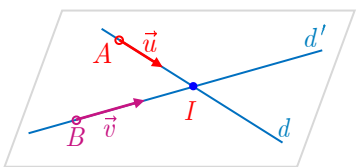
نستنتج أنّ $AH = KC'$، ولأنّ $O(\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a)$ استنتجنا إحداثيات النقطة K من كون O منتصف KH : $K(\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}a)$.

بسبب التناظر نجد أنّ K هي أيضاً مسقط النقطتين B' و C على (AC').

[121] في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا النقطتان $A(3,-1,1)$ و $B(3,-3,-1)$، والشعاعان $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$. d هو المستقيم المار بالنقطة A والموجَّه بالشعاع $\vec{u}$، و d' هو المستقيم المار بالنقطة B والموجَّه بالشعاع $\vec{v}$. أثبت أنَّ المستقيمين d و d' متقاطعان، ثمَّ عيّن I نقطة تقاطعهما.

الحل:

الشعاعان $\vec{u}(1,0-2)$ و $\vec{v}(2,1-3)$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير



متناسبة.

لما كان الشعاعان غير مرتبطين خطياً كان المستقيمان d و d' غير متوازيين.

النقطة B لا تقع على المستقيم d فرضاً، فالمستقيم d والنقطة B يعينان مستوياً $\mathcal{P}$. ولكي نثبت أن d و d' يقعان في مستوٍ واحد، نثبت أنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً.

لنثبت أنّه يوجد عددان حقيقان a و b يحققان :

$\overrightarrow{AB}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}$.

$(0,-2,-2)=a(1,0-2)+b(2,1-3)$.

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ 0+\ b=-2 \\ -2a-3b=-2 \end{cases}$$

بالحل المشترك للمعادلتين الأولى والثانية نجد $b=-2$ و $a=4$،

وبالتعويض في المعادلة الثالثة نجد أنها محققة. إذن يقع المستقيمان d و d' في مستوٍ واحد. وهما متقاطعان في نقطة I لأننا أثبتنا أنّ d و d' غير متوازيين .

لحساب إحداثيات $I(x,y,z)$، نستفيد من انتماء النقطة I إلى كلٍ من d و d' .

لأنّ $I\in d$ يوجد عدد حقيقي α يحقق $\overrightarrow{AI}=\alpha\cdot\vec{u}$.

ولأن $I\in d'$ يوجد عدد حقيقي β يحقق $\overrightarrow{BI}=\beta\cdot\vec{v}$.

نستنتج إذن أنّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=\alpha\vec{u}-\beta\vec{v}$ وهذا يقتضي أن يكون $\alpha=4$ و $\beta=2$ استناداً إلى الفقرة السابقة. إذن $\overrightarrow{AI}=4\vec{u}$. أو $(x-3,y+1,z-1)=4(1,0,-2)$. ومنه نجد أن $I(7,-1,-7)$.

[122] $A(4,0,-3)$ و $B(2,2,2)$ و $C(3,-3,-1)$ و $D(0,0,-3)$.

① أعطِ معادلة للمستوي المحوري $\mathbb{P}_1$ للقطعة المستقيمة $[AB]$. أعطِ معادلة للمستوي المحوري $\mathbb{P}_2$ للقطعة المستقيمة $[BC]$. أعطِ معادلة للمستوي المحوري $\mathbb{P}_3$ للقطعة المستقيمة $[CD]$.

② علّل أن المستويات $\mathbb{P}_1$ و $\mathbb{P}_2$ و $\mathbb{P}_3$ تتقاطع في نقطة واحدة Ω مركزاً لكرة تمرّ بالنقاط A و B و C و D.

③ بحلّ جملة من ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل أثبت أنّ المستويات $\mathbb{P}_1$ و $\mathbb{P}_2$ و $\mathbb{P}_3$ تتقاطع في نقطة واحدة Ω.

④ احسب نصف قطر الكرة $\mathbb{S}$ المارة بالنقاط A و B و C و D.

⑤ اكتب معادلة للكرة $\mathbb{S}$ المارة برؤوس رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل:

① إذا كانت M منتصف القطعة $[AB]$ كانت إحداثياتها $M(3,1,-\frac{1}{2})$.

وكان $\overrightarrow{AB}(-2,2,5)$ ناظماً على المستوي المحوري $\mathbb{P}_1$.

فتكون معادلة $\mathbb{P}_1$ هي :

$$-2(x-3)+2(y-1)+5(z+\frac{1}{2})=0$$

ومنه $\mathcal{P}_1:-4x+4y+10z+13=0$.

نفرض $M(x,y,z)$ من $\mathbb{P}_2$ وبالتالي $MB^2=MC^2$ أي

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=(x-3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2$$

فتكون معادلة $\mathbb{P}_2$ هي $2x-10y-6z-7=0$.

بالمثل نجد معادلة $\mathbb{P}_3$ هي $\mathcal{P}_3:-3x+3y-2z+5=0$.

② المستويات الثلاثة تتقاطع في Ω فهي تعطي $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D$ بحسب تعريف المستوي المحوري وبالتالي هي مركز الكرة المارة بالنقاط A و B و C و D.

③ نحل جمل المعادلات

$$4x-\ 4y-10z=13 \quad (1)$$
$$2x-10y-\ 6z=7 \quad (2)$$
$$3x-\ 3y+\ 2z=5 \quad (3)$$

من (1), (3) نجد $x-y=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}z=\frac{13}{4}+\frac{5}{2}z$

ومنه $z=-\frac{1}{2}$ و $x-y=2$.

وبتعويض قيمة z و $x=y+2$ في الثانية نجد $y=0$ ومن ثَم $x=2$. وبالتالي $\Omega(2,0,-\frac{1}{2})$.

④ $R=\Omega D$ أي $R=\sqrt{4+0+(-3+\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{41}{4}}$.

⑤ معادلة الكرة المارة برؤوس رباعي الوجوه $ABCD$ هي : $(x-2)^2+y^2+(z+\frac{1}{2})^2=\frac{41}{4}$.

[123] نتأمّل معلماً متجانساً $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$. ليكن G مركز ثقل المثلث ABC.

① احسب إحداثيات G، وتحقّق أنّ (OG) عمودي على (ABC).

② تعرّف النقاط $A'(2,0,0)$ و $B'(0,2,0)$ و $C'(0,0,3)$ المستوي $(A'B'C')$. اكتب معادلة للمستوي $(A'B'C')$. وأثبت أنّ $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستقيم (AC) إذا وُجد عدد k بحيث

$$\begin{cases} x=1-k \\ y=0 \\ z=k \end{cases}.$$

احسب إحداثيات K المشتركة بين المستقيم (AC) و $(A'B'C')$.

③ جد إحداثيات النقطة L المشتركة بين المستقيم (BC) والمستوي $(A'B'C')$. وأثبت توازي المستقيمات (AB) و $(A'B')$ و (KL).

④ عيّن تقاطع المستويين (ABC) و $(A'B'C')$ بدلالة النقاط المعرّفة سابقاً.

الحل:

① لدينا $A(1,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ نستنتج $G(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.
ونحسب $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AC}=0$
ومنه $\overrightarrow{OG}$ عمودي على شعاعين موجهين للمستوي (ABC) فالمستقيم (OG) عمودي على (ABC).

② نجد بسهولة معادلة المستوي $(A'B'C')$: $3x+3y+2z=6$.
لدينا $\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$ شعاعاً موجهاً للمستقيم (AC) الذي يمر بالنقطة $A(1,0,0)$ ومنه $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC}$ أن

$$\begin{cases}x=1-k\\y=0\\z=k\end{cases}\qquad k\in\mathbb{R}$$

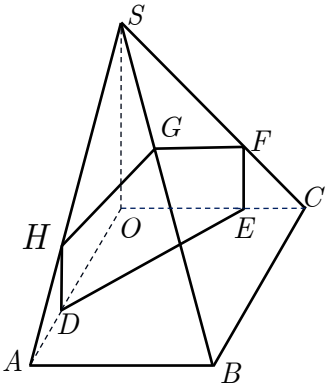
لدينا $K(1-k,0,k)$ من المستقيم (AC) وهي تنتمي إلى المستوي $(A'B'C')$ إذا حققت إحداثياتها معادلته، أي إذا كان $k=-3$.
فإحداثيات K هي $(4,0,-3)$.

③ بنفس الأسلوب نحسب L فنجد $L(0,4,-3)$
نجد $\overrightarrow{KL}=(-4,4,0)=4\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{A'B'}$ فالمستقيمات (AB) و $(A'B')$ و (KL) متوازية.

④ لدينا $K\in(AC)$ و $(AC)\subset(ABC)$ و $K\in(A'B'C')$ ومنه K تقع على الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$. ولدينا $L\in(BC)\subset(ABC)$ و $L\in(A'B'C')$ ومنه L تقع على الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$. فالمستقيم (KL) هو الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$.

[124] في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمّل الهرم $S\text{-}OABC$ حيث $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}$ و $\overrightarrow{OC}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OS}=\vec{k}$. وليكن t عدداً يحقّق $0<t<1$. نقطع الهرم بالمستوي $\mathbb{P}$ > $x+y=t$

① يقطع المستوي $\mathbb{P}$ المستقيمات (OA) و (OC) و (SC) و (SB) و (SA) في D و E و F و G و H بالترتيب. ارسم شكلاً وبيّن طبيعة هذا المقطع.



② أثبت أنّ $DEFH$ مستطيل، وعبّر عن مساحته بدلالة t.

③ جد إحداثيات G، ثُمّ مساحة FGH بدلالة t. استنتج $\mathbb{A}(t)$ مساحة المقطع بدلالة t.

④ ادرس اطراد $\mathbb{A}$ على المجال $]0,1[$، واستنتج قيمة t التي تجعل مساحة المقطع أعظمية.

⑤ استنتج أنّ المستوي المار بمركز ثقل OAC ويقبل $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{OS}$ شعاعي توجيه هو مقطعاً أعظمي المساحة.

الحل: ① المقطع شكل خماسي:

② لدينا $D(t,0,0)$ و $E(0,t,0)$، والمستوي $\mathbb{P}$ يوازي (Oz)، وبالتالي كل من (EF) و (DH) يوازي (Oz) وكل من المثلثين ECF و DAH قائم ومتساوي الساقين. أي $H(t,0,1-t)$ و $F(0,t,1-t)$، ومنه $\overrightarrow{EF}=(1-t)\vec{k}=\overrightarrow{DH}$.
ولدينا $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{EF}$ أي $\overrightarrow{DE}\perp\vec{k}$ ومنه $DEFH$ مستطيل.
ولكن $DE=\sqrt{2}t$ ومنه $S(DEFH)=\sqrt{2}t(1-t)$.

③ يقبل المستقيم (SB) الشعاع $\overrightarrow{SB}(1,1,-1)$ شعاعاً موجهاً، ومنه

$$(SB)\begin{cases}x=k\\y=k\\z=1-k\end{cases}\qquad k\in\mathbb{R}$$

ولكن النقطة G تنتمي إلى $\mathbb{P}$، فهي تحقق معادلة $\mathbb{P}$، أي $2k=t$
ومنه $G(\frac{t}{2},\frac{t}{2},1-\frac{t}{2})$، ولدينا $F(0,t,1-t)$ و $H(t,0,1-t)$.
فالمثلث HFG مثلث متساوي الساقين طول قاعدته $\sqrt{2}t$ وارتفاعه $\frac{t}{2}$.
ومنه مساحة FGH تساوي $\frac{\sqrt{2}}{4}t^2$.

④ مساحة الخماسي $DEFGH$ هي

$$\mathcal{A}(t)=\frac{\sqrt{2}}{4}t^2+\sqrt{2}t(1-t)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}t^2+\sqrt{2}t-\sqrt{2}t^2=\frac{\sqrt{2}}{4}(4t-3t^2)$$

$\mathcal{A}'(t)=\frac{\sqrt{2}}{4}(4-6t)$ نجعل $\mathcal{A}'(t)=0$ فيكون $t=\frac{2}{3}$ و $\mathcal{A}(\frac{2}{3})=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ومنه جدول الاطراد هو

t	0		$\frac{2}{3}$		1
$\mathcal{A}'(t)$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{A}(t)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	

ومنه مساحة المقطع $DEFGH$ تبلغ اكبر قيمة عند $t=\frac{2}{3}$ وهي تساوي $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

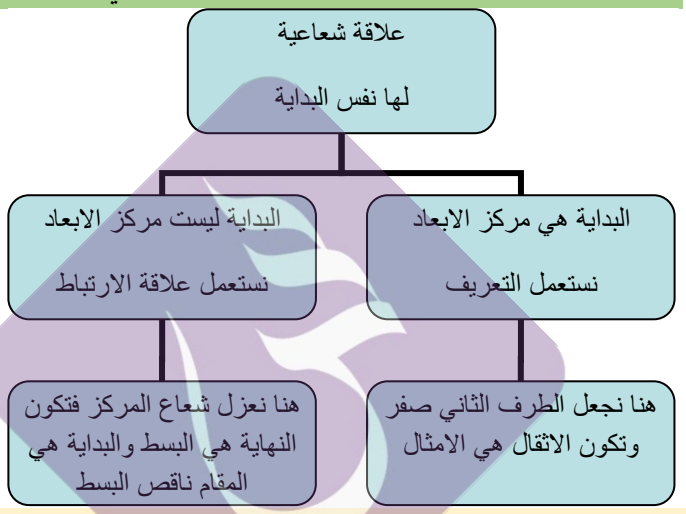
⑤ ليكن $\mathcal{Q}$ المستوي الذي يقبل الشعاعين $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{OS}$ شعاعي توجيه، ويمر بمركز ثقل المثلث OAC أي النقطة $M(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0)$.
الشعاع $\overrightarrow{OB}(1,1,0)$ عمودي على كل من $\overrightarrow{CA}(1,-1,0)$ و $\overrightarrow{OS}(0,0,1)$. ومنه $\overrightarrow{OB}$ ناظم على المستوي $\mathcal{Q}$. فمعادلة هذا المستوي من الشكل $x+y=d$، ونوجد d من أن هذا المستوي يمر بالنقطة M ومنه $d=\frac{2}{3}$. ومنه معادلة $\mathcal{Q}$ هي $x+y=\frac{2}{3}$ فهو المستوي $\mathcal{P}$ الموافق لقيمة $t=d=\frac{2}{3}$ التي تجعل مساحة المقطع أعظمية.

مركز الابعاد المتناسبة

1. مركز ابعاد نقطتين:

تعريف: مركز الأبعاد المتناسبة G للنقطتين المثقّلتين (A,α) و (B,β) حيث $\alpha+\beta\neq 0$، هو النقطة الوحيدة G التي تحقّق العلاقة $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

طرق تعيين الاثقال: يمكن تعيين الاثقال بثلاث طرق وهي:



♣ **طريقة التعريف: تُستعمل عندما تكون البداية هي مركز الابعاد وهنا نجعل الطرف الثاني صفر .**

أي $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ويكون G مركز ابعاد (A,α) و (B,β).

[1] نعطي النقطتين A و B، ونعرّف G بالشرط أدناه. أوجد عددين α و β كي تكون G مركز الأبعاد للنقطتين (A,α) و (B,β).

ⓐ $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GB}$. ⓑ $2\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{AG}=\vec{0}$.

ⓒ $\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ⓓ $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

الحل:

♣ **طريقة الارتباط الخطي: تُستعمل عندما تكون البداية ليست مركز الابعاد وهنا نعزل شعاع المركز.**

أي $\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}$ ويكون G مركز **ابعاد** $(A,1-\alpha)$ و (B,α).

أي النهاية هي البسط والبداية هي المقام ناقص البسط

[2] أعطِ α و β لتكون M مركز الأبعاد للنقطتين (A,α)و (B,β).

ⓐ $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$ ⓑ $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

ⓒ $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. ⓓ $3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

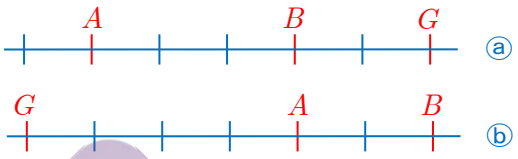
الحل:

أسما المجد التعليمية

♣ **طريقة الرسم: نشكل علاقة ارتباط خطي بين شعاعين بدايتهما ليست مركز الابعاد.**

أي شعاع المركز(احد الطرفين والمركز) يساوي نسبة من القطعة.

[3] في الشكل الآتي، التدريجات متساوية. أعطِ α و β لتكون G مركز الأبعاد للنقطتين (A,α)و (B,β).



الحل:

♣ يمكن أن نضرب الاثقال بعدد ما غير الصفر.

طريقة تعيين مركز الأبعاد: يوجد حالتان:

1- **تساوي الاثقال:** يكون مركز الابعاد في المنتصف.

2- **عدم تساوي الاثقال:** نشكل علاقة ارتباط خطي باستعمال:

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ ثم نعين النقطة.

[4] عين G مركز الأبعاد للنقطتين

ⓐ $(A,2)$و $(B,2)$.
ⓑ $(A,3)$و $(B,2)$.
ⓒ $(A,-4)$و $(B,2)$.
ⓓ $(A,3)$و $(B,-2)$.

الحل:

2. مركز ابعاد ثلاث نقاط:

تعريف: مركز الأبعاد المتناسبة G للنقاط المثقّلة الثلاث (A,α) و (B,β) و (C,γ) حيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$، هو النقطة الوحيدة G التي تحقّق العلاقة $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

طرق تعيين الاثقال يمكن تعيين الاثقال بثلاث طرق وهي:

♣ **طريقة التعريف:** تُستعمل عندما تكون البداية هي مركز الابعاد وهنا نجعل الطرف الثاني صفر . أي $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

ويكون G مركز ابعاد (A,α) و (B,β) و (C,γ).

♣ **طريقة الارتباط الخطي:** تُستعمل عندما تكون البداية ليست مركز الابعاد وهنا نعزل شعاع المركز. أي $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

ويكون G مركز ابعاد $(A,1-x-y)$ و (B,x) و (C,y).

♣ **طريقة الرسم:** نشكل علاقة ارتباط خطي بين شعاعين بدايتهما ليست مركز الابعاد ثم نستعمل الخاصة التجميعية.

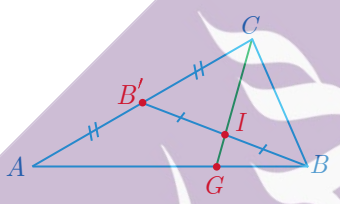
♣ يمكن أن نضرب الاثقال بعدد ما غير الصفر.

[5] نتأمّل مثلثاً ABC . جِدْ الأعداد α و β و γ لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ).

ⓐ $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$
ⓑ $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}$
ⓒ $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$
ⓓ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

الحل:

[6] انطلاقاً من الشكل المجاور. جد الأمثال α و β و γ لتكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ). واستنتج λ التي تحقق $\overrightarrow{GA}+\lambda\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.



الحل:

طريقة تعيين مركز الأبعاد: يوجد حالتان:

1-**تساوي الاثقال:** يكون مركز الابعاد في مركز الثقل أي نقطة تلاقي المتوسطات.

2-**عدم تساوي الاثقال:** نشكل علاقة ارتباط خطي بين نقطتين باستعمال: $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ ثم نعين النقطة ثم نستعمل الخاصة التجميعية لتجميع النقطة الناتجة مع باقي النقاط.

[8] ليكن المثلّث ABC. أنشئ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

ⓐ $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$.

ⓑ $(A,2)$ و $(B,4)$ و $(C,1)$.

ⓒ $(A,1)$ و $(B,4)$ و $(C,-3)$.

الحل:

♣ يمكن أن نجعل مجموع الاثقال واحد بالقسمة على مجموع الاثقال.

[7] مثلثاً ABC. جِدْ x و y بحيث $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

ⓐ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$.

ⓑ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$ و $(B,1)$ و $(C,2)$.

الحل:

3. مركز أبعاد أربع نقاط:

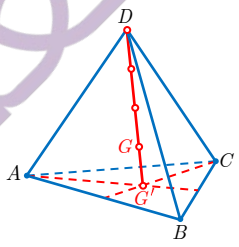
تعريف: مركز الأبعاد المتناسبة G للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ) حيث $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0$ ، هو النقطة الوحيدة G التي تحقّق العلاقة $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

رباعي الوجوه المنتظم

- هو مجسّم له أربعة وجوه كل منها مثلث متساوي الأضلاع وطبوقة.
  نسمّي حرفين متقابلين كل حرفين لا يشتركان برأس.
- نسمى القطعة المستقيمة التي تصل الرأس بمركز ثقل الوجه المقابل متوسطاً في رباعي الوجوه.
- القطعة المستقيمة التي تصل بين منتصفي حرفين متقابلين في رباعي الوجوه المنتظم تعامد الحرفين
- المتوسطات تتلاقى في نقطة واحدة تقسم كل متوسط إلى جزئين أحدهما ربع المتوسط.

إذا كانت أثقال مجسم متساوية يصبح مركز أبعاده مركز ثقله.

مثال1: ليكن $ABCD$ رباعي وجوه، وليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$.



الحل1: النقا ط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ مركزها G' مركز ثقل المثلث ABC.

وبحسب الخاصة التجميعية: G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(G',3)$ و $(D,1)$، إذن تُحقّق G العلاقة $\overrightarrow{G'G}=\frac{1}{4}\overrightarrow{G'D}$.

[9] ليكن $ABCD$ رباعي وجوه. استعمل الخاصة التجميعية لتعيين G:

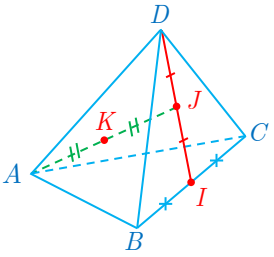
ⓐ G مركز الأبعاد للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,3)$.

ⓑ G مركز الأبعاد للنقاط $(A,-1)$ و $(B,2)$ و $(C,-1)$ و $(D,-2)$.

ⓒ G مركز الأبعاد للنقاط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و $(D,6)$.

الحل:

[10] انطلاقاً من الشكل المجاور. جد الأمثال α و β و γ و δ لتكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ).



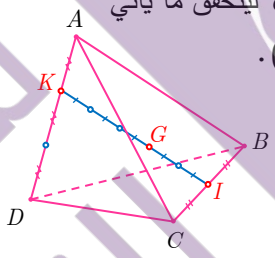
الحل:

[11] عيّن الأعداد الأربعة a و b و c و d ليتحقق ما يأتي

K مركز الأبعاد للنقطتين (A,a) و (D,d).

I مركز الأبعاد للنقطتين (B,b) و (C,c).

G مركز الأبعاد للنقاط (A,a) و (B,b) و (C,c) و (D,d).



الحل:

4. خاصة الاختزال:

يمكن جمع أشعة لها نفس البداية ويكون الناتج شعاعا مثاله مجموع الامثال وبدايته البداية ذاتها والنهاية مركز أبعاد النهايات. نشترط هنا أن يكون مجموع الامثال ليس صفر.

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MG}$$

حيث G مركز الأبعاد للنقاط (A,a) و (B,b) و (C,c) و (D,d).

[12] عيّن المجموعة $\mathbb{E}$ المكوّنة من النقاط M التي تحقّق $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

الحل:

[13] جد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|$$

الحل:

سما المجد التعليمية

[14] عيّن المجموعة $\mathbb{F}$ المكوّنة من النقاط M التي تحقّق

$$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$$

الحل:

5. إحداثيات مركز الابعاد:

مركز ابعاد نقطتين (A,α) و (B,β) هو $G=\dfrac{\alpha A+\beta B}{\alpha+\beta}$.

مركز ابعاد ثلاث نقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ):

$$G=\frac{\alpha A+\beta B+\gamma C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

مركز ابعاد أربع نقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ)

$$G=\frac{\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

[15] عين مركز ثقل المثلث ABC، في حالة $A(-4,-1,2)$ و $B(-2,1,0)$ و $C(6,3,-5)$.

الحل:

[16] $ABCD$ رباعي وجوه. $A(1,-1,2)$ و $B(2,1,0)$ و $C(2,3,-1)$ و $D(0,0,2)$ عين إحداثيات:

ⓐ I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,3)$ و $(B,2)$.

ⓑ J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,2)$ و $(D,1)$.

ⓒ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-2)$ و $(C,-1)$.

ⓓ N مركز الأبعاد للنقاط $(A,1)$ و $(B,-2)$ و $(C,-1)$ و $(D,1)$.

الحل:

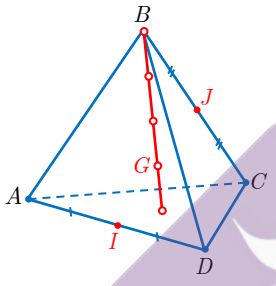
سما المجد التعليمية

6. مسائل الاستقامة الواحدة ومركز الأبعاد :

♣ لإثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة يكفي إثبات أنّ إحداها هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الأخريين.

♣ لإثبات وقوع أربع نقاط في مستو واحد يكفي إثبات أنّ إحداها هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الثلاث الأخرى.

مثال2: $ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G. I منتصف $[AD]$، J منتصف $[BC]$. أثبت أنّ I و J و G تقع على استقامة واحدة.



الحل2: لدينا G مركز ثقل $ABCD$، فهو إذن مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$.

ولكنّ I منتصف $[AD]$، هو مركز الأبعاد للنقطتين $(A,1)$ و $(D,1)$.

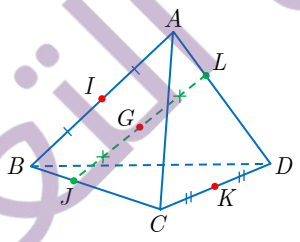
و J هو مركز الأبعاد للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$.

وبحسب الخاصّة التجميعيّة، النقطة G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$ و $(J,2)$.

فالنقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة، وتكون تقع G في منتصف $[IJ]$.

مثال3: (دورة 2 – 2017)

$ABCD$ رباعي وجوه، K و I منتصفا الحرفين $[AB]$ و $[CD]$، و J و L نقطتان معرّفتان بالعلاقتين $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$، وأخيراً G هي منتصف $[JL]$



أثبت أنّ النقاط G و I و K تقع على استقامة واحدة.

الحل3: من العلاقة $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$: L هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(D,1)$، من العلاقة $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$: J هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(B,2)$.

للنقطتين $(L,3)$ و $(J,3)$ نفس الثقل فيكون G في منتصف $[IJ]$ هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(L,3)$ و $(J,3)$ وباستعمال الخاصة التجميعية

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(D,1)$ و $(C,1)$ و $(B,2)$.

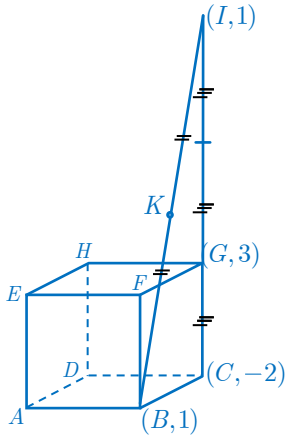
ولكن I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,2)$ و K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,1)$

وبحسب الخاصة التجميعية نرى أنّ النقطة G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,4)$ و $(K,2)$

إذن تقع النقاط G و K و I على استقامة واحدة.

مثال4: $ABCDEFGH$ مكعب. أثبت أنّ النقطة K المعرفة بالعلاقة $2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$ تقع في المستوي (BCG).

ارسم النقطة K.



الحل4: لدينا :

$$2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{AG}$$
$$2\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CK}$$
$$3\overrightarrow{AK}-3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CK}$$
$$3(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AK})=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CK}$$
$$3\overrightarrow{GK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CK}$$
$$3\overrightarrow{GK}=\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{CK}$$
$$\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}+3\overrightarrow{KG}=\vec{0}$$

ومنه K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$ و $(C,-2)$ و $(G,3)$. ومنه K تقع المستوي (BCG).

لرسم النقطة K، نبدأ برسم I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(G,3)$ و $(C,-2)$، إذ تُكتب العلاقة $\overrightarrow{GL}=-2\overrightarrow{GC}$، فنرسم I على امتداد $[CG]$ ونرسم K مركز $(B,1)$ و $(L,1)$ منتصف $[BL]$.

[17] ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه. وليكن α عدداً حقيقيّاً، و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$. النقطتان E و F معرّفتان بالعلاقتين $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF}=\alpha\overrightarrow{BC}$. و H منتصف $[EF]$.

ⓐ تحقّق أنّ E هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (D,α)، وكذلك أنّ النقطة F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1-\alpha)$ و (C,α).

ⓑ أثبت أنّ النقطة H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-\alpha)$ و $(B,1-\alpha)$ و (C,α) و (D,α).

ⓒ استنتج وقوع النقاط I و J و H على استقامة واحدة.

الحل:

[18] نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$، ونقطتين E و F معرفتين وفق $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. أثبت أنّ G، مركز الأبعاد للنقاط $(A,1)$ و $(B,3)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$، يقع على $[EF]$. عينه

الحل:

[19] ليكن $ABCD$ رباعي وجوه ما. ولنعرّف P و Q و R و S:

$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

ⓐ بين G مركز الأبعاد $(A,1),(B,4),(C,1),(D,3)$ يقع على (PQ).

ⓑ أثبت G تقع على (RS)، فالمستقيمان (PQ) و (RS) متقاطعان.

ⓒ لتكن I منتصف $[AC]$. أثبت تلاقي المستقيمين (IG) و (BD)، وعيّن نقطة تقاطعهما.

الحل:

سما المجد التعليمية

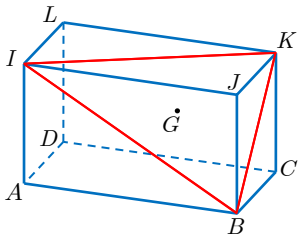
[20] $ABCD$ رباعي وجوه. أثبت أنّ النقاط M و B و C و D تقع في مستو واحد، ثُم وضّع النقطة M.

ⓐ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$

ⓑ $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$

الحل:

تمارين عامة محلولة



[21] ليكن $ABCDIJKL$ متوازي سطوح. وليكن G مركز ثقل المثلث BIK. أثبت أنَّ D و G و J تقع على استقامة واحدة.

الحل:

لدينا G مركز ثقل المثلث BIK، ومنه $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GK}=\vec{0}$. ومنه

$$3\overrightarrow{JG}=\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{JK}$$

$$3\overrightarrow{JG}=\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\Rightarrow 3\overrightarrow{JG}=\overrightarrow{JD}$$

ومنه تقع النقاط D و G و J على استقامة واحدة.

طريقة2: نختار المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI})$، فيكون $B(1,0,0)$ و $D(0,1,0)$ و $J(1,0,1)$ و $K(1,1,1)$. G مركز ثقل BIK:

$$G\left(\frac{1+0+1}{3},\frac{0+0+1}{3},\frac{0+1+1}{3}\right)=G\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{DG}\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) \quad \text{و} \quad \overrightarrow{DJ}(1,-1,1)$$

نلاحظ $\overrightarrow{DG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DJ}$ فالشعاعان $\overrightarrow{DG}$ و $\overrightarrow{DJ}$ مرتبطان خطيّاً، فالنقاط D و G و J تقع على استقامة واحدة.

[22] نتأمّل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ. وعدداً موجباً غير معدوم k. نعرّف $\mathbb{E}_k$ مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقّق الشرط $AM=k\cdot BM$.

① حالة $k=1$. و I منتصف $[AB]$ أثبت $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MI}=\frac{MA^2-MB^2}{2}$

استنتج أنّ $\mathbb{E}_1$ هي المستوي $\mathbb{P}$ المار بمنتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ والعمودي على (AB).

② حالة $k\neq 1$. لتكن I مركز الأبعاد للنقطتين $(A,1)$ و (B,k)، ولتكن J مركز الأبعاد للنقطتين $(A,1)$ و $(B,-k)$. أثبت أنّ

$$\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=\frac{1}{1-k^2}(\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB})=\frac{MA^2-k^2MB^2}{1-k^2}$$

استنتج أنّ $\mathbb{E}_k$ هي الكرة $\mathbb{S}$ التي تقبل القطعة $[IJ]$ قطراً فيها.

الحل:

① لدينا I منتصف $[AB]$

ومنه $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$ و $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$ ومنه

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2\right)=\frac{MA^2-MB^2}{2}$$

$M \in \mathbb{E}_k$ يعني $MA = MB$ ومنه $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MI} = 0$ أي M تنتمي إلى المستوي المار بالنقطة I والعمودي على $\overrightarrow{AB}$. فهو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

② لدينا I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و (B,k) أي :

$\overrightarrow{IA} + k\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = (1+k)\overrightarrow{MI}$ (1)

وأيضاً J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,-k)$ أي:

$\overrightarrow{JA} - k\overrightarrow{JB} = \vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = (1-k)\overrightarrow{MJ}$ (2)

من (1) و (2) نجد

$$(1-k^2)\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ} = (\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB})$$

ومنه

$$\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{1-k^2}(MA^2 - k^2MB^2) = \frac{MA^2 - k^2MB^2}{1-k^2}$$

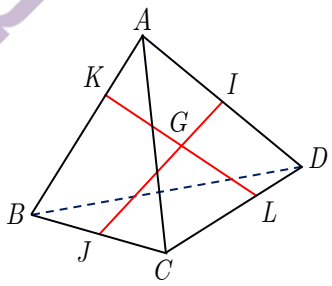
$M \in \mathbb{E}_k$ يعني $MA = kMB$ و منه $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ} = 0$ و منه M تنتمي إلى الكرة التي قطرها $[IJ]$.

[23] نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. K نقطة من $[AB]$ تحقق $AK = \frac{1}{3}AB$، و L نقطة من القطعة المستقيمة $[CD]$ تحقق $CL = \frac{2}{3}CD$. وأخيراً I هي منتصف $[AD]$، و J هي منتصف $[BC]$. نعرّف G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$.

① أثبت أنّ النقاط G و I و J تقع على استقامة واحدة. وأنّ النقاط G و K و L تقع على استقامة واحدة.

② استنتج وقوع النقاط I و J و K و L في مستوٍ واحد.

الحل:



① لدينا I منتصف $[AD]$ هي مركز الأبعاد للنقطتين $(A,2)$ و $(D,2)$. و J منتصف $[BC]$ هي مركز الأبعاد للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$. وبحسب الخاصة التجميعية G هي مركز الأبعاد للنقطتين $(I,4)$ و $(J,2)$. G و I و J تقع على استقامة واحدة.

وبالمثل K هي مركز الأبعاد للنقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$. وكذلك L هي مركز الأبعاد للنقطتين $(D,2)$ و $(C,1)$. ومنه استناداً إلى الخاصة التجميعية G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,3)$ و $(L,3)$. وبالتالي النقاط G و K و L تقع على استقامة واحدة.

② (KL) و (IJ) متقاطعان في G فهما يعينان مستوياً واحداً، وبالتالي تقع I و K و J و L في مستوٍ واحدٍ.

[24] نُعطى معلماً متجانساً في الفراغ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نُعطى النقطتين $A(1,0,0)$ و $B(4,3,-3)$.

① أتكون مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A;1-\alpha)$ و $(B;\alpha)$ عندما تتحوّل α في $\mathbb{R}$، هي نفسها المستقيم المار بالنقطة A وشعاع توجيهه $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ ؟

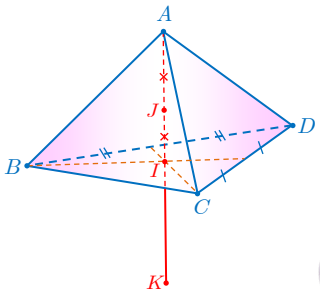
② أتكون مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد للنقاط $(A,1-x-y)$ و (B,x) و (O,y) عندما x و y في $\mathbb{R}$، هي نفسها المستوي المار بالنقطة O ويقبل $\vec{i}$ و $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ شعاعي توجيه؟

الحل:

① نعم لأن: لدينا الشعاع $\vec{v} = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ وبالتالي نلاحظ $\overrightarrow{AB} = 3\vec{v}$ ومنه المستقيم المار بالنقطة A وشعاع توجيهه $\vec{v}$ هو نفسه (AB) وهو مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (B,α) عندما α في $\mathbb{R}$.

② نعم لأن: المستوي المار بالنقطة O وله $\vec{i}$ و $\vec{v}$ شعاعي توجيه، هو المستوي المار بالنقطة O وله $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AB}$ شعاعي توجيه. ومنه (OAB) هو مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-x-y)$ و (B,x) و (O,y) عندما x و y في $\mathbb{R}$.

[25] ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه. وليكن I مركز ثقل المثلث BCD، و J منتصف $[AI]$ و K نظيرة A بالنسبة إلى I.



عبّر عن J و K بصفتهما مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C و D بعد تزويدها بأمثال مناسبة.

الحل:

فرضاً لدينا

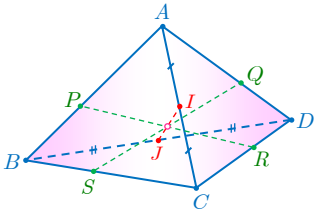
$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}(3\overrightarrow{AI}) = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$$

وهذه تكتب $3\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD} = \vec{0}$ بالاستفادة من علاقة شال. إذن J هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$. وبالمثل لدينا

$$\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}(3\overrightarrow{AI}) = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$$

وهذه تكتب $-3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}+2\overrightarrow{KD} = \vec{0}$ بالاستفادة من علاقة شال. إذن K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-3)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(D,2)$.

[26] نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$.



لتكن x من $]0,1[$، ولتكن P و Q و R و S النقاط التي تحقّق

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{CR}=x\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CS}=x\overrightarrow{CB}$

النقطتان I و J هما منتصفا الحرفين $[AC]$ و $[BD]$.

أثبت تلاقي المستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) في نقطة واحدة.

الحل:

- من $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}$ نجد P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,x) و $(A,1-x)$.

من $\overrightarrow{CR}=x\overrightarrow{CD}$ نجد أنّ R هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (D,x) و $(C,1-x)$.

استناداً إلى الخاصة التجميعية، G هي مركز الأبعاد المتناسبة لكل من $(P,1)$ و $(R,1)$، أي هي منتصف $[PR]$.

- من $\overrightarrow{CS}=x\overrightarrow{CB}$ نجد أنّ S هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,x) و $(C,1-x)$.

من $\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AD}$ نجد أنّ Q هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (D,x) و $(A,1-x)$.

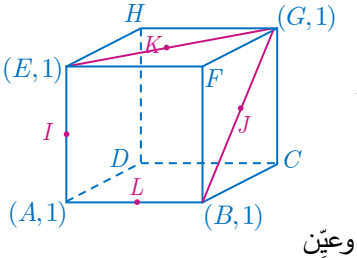
- استناداً إلى الخاصة التجميعية، G هي مركز الأبعاد المتناسبة لكل من النقطتين $(Q,1)$ و $(S,1)$، أي هي منتصف $[SQ]$.

وأخيراً لأنّ I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-x)$ و $(C,1-x)$، وكذلك J هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,x) و (D,x)، استنتجنا أنّ G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2-2x)$ و $(J,2x)$.

فالنقطة G تنتمي أيضاً إلى القطعة المستقيمة $[IJ]$.

نستنتج مما سبق أنّ G نقطة تلاقي القطع المستقيمة $[IJ]$ و $[PR]$ و $[SQ]$، فالمستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) تتلاقى في نقطة واحدة.

[27] نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$، والنقاط I و J و K و L منتصفات $[AE]$ و $[BG]$ و $[EG]$ و $[AB]$ بالترتيب. والنقطة M مركز الأبعاد للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(G,1)$ و $(E,1)$.



ⓐ أثبت أنّ M تنتمي إلى $[IJ]$ وعيّن موضعها على هذه القطعة.

ⓑ أثبت أنّ M تنتمي إلى $[KL]$ وعيّن موضعها على هذه القطعة.

ⓒ استنتج أنّ I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد وعيّن طبيعة الرباعي $ILJK$.

الحل:

ⓐ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(G,1)$ و $(E,1)$ ولأن I منتصف $[AE]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(E,1)$، و J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(G,1)$، فتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$ و $(J,2)$

إذن M منتصف $[IJ]$.

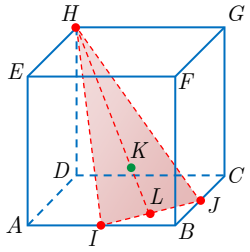
ⓑ لأن K منتصف $[EG]$ فهي مركز الأبعاد للنقطتين $(E,1)$ و $(G,1)$ ، و L مركز الأبعاد للنقطتين $(A,1)$ و $(B,1)$، ومنه M مركز الأبعاد للنقطتين $(K,2)$ و $(L,2)$

إذن M منتصف $[KL]$.

ⓒ ومنه يتلاقى المستقيمان (IJ) و (KL) في M فالنقاط I و J و K و L تقع في مستو واحد،

والشكل $ILJK$ متوازي أضلاع لأن قطريه متناصفان.

[28] $ABCDEFGH$ مكعّبٌ، I و J منتصفا الحرفين $[AB]$ و $[BC]$ ، و K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(H,1)$. أثبت وقوع النقاط I و J و K و H في مستوٍ واحدٍ.



الحل:

لدينا I هي مركز الأبعاد للنقطتين $(A,1)$ و $(B,1)$، و J هي مركز الأبعاد للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$.

ولأنّ K هي مركز الأبعاد للنقاط $(A;1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(H,1)$.

وبحسب الخاصة التجميعية أنّ K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,2)$ و $(J,2)$ و $(H,1)$.

ومنه K واقعة في المستوي (IJH) والنقاط I و J و K و H تقع في مستوٍ واحدٍ.

[29] نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. ونقطتين I و J معرفتين وفق $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{JC}=2\overrightarrow{JD}$.

① أيمكن أن تنطبق إحدى النقطتين I و J على الأخرى؟

② أثبت أنه، أياً كانت النقطة M من الفراغ، كان :

$\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}$ و $\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MJ}$

الحل:

① لدينا $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$ ومنه I تقع على (AB)، ولدينا $\overrightarrow{JC}=2\overrightarrow{JD}$ ومنه J تقع على (CD)، أصبحت I و J تقعان على مستقيمان متخالفان. وعليه لا يمكن أن تنطبق النقطتان I و J.

② لما كانت B منتصف $[IA]$ كانت مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,1)$ و $(A,1)$ ومنه $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MI}=2\overrightarrow{MB}$ إذن $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}$، وكذلك D هي منتصف $[JC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(C,1)$ و $(J,1)$ ومنه $\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$ إذن $\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MC}$.

[30] نتأمّل ثلاث نقاط A و B و C من الفراغ، وعدداً حقيقياً k من المجال $[-1,1]$. نرمز G_k إلى مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A;k^2+1)$ و $(B;k)$ و $(C;-k)$.

① مثّل النقاط A و B و C و I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$، وأنشئ النقطتين G_1 و G_{-1}.

② أثبت أنّه مهما كان العدد k من $[-1,1]$ كان $\overrightarrow{AG_k}=-\dfrac{k}{1+k^2}\overrightarrow{BC}$. وادرس تغيرات التابع f المعرّف على $[-1,1]$ بالصيغة $f(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$. واستنتج مجموعة النقاط G_k عندما تتحوّل k في المجال $[-1,1]$.

③ عيّن المجموعة $\mathbb{E}$ المكوّنة من النقاط M التي تحقّق
$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

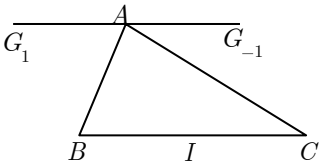
④ عيّن المجموعة $\mathbb{F}$ المكوّنة من النقاط M التي تحقّق
$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$

⑤ نزوّد الفضاء بمعلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. ونفترض أنّ النقاط A و B و C معطاة كما يأتي: $A(0,0,2)$ و $B(-1,2,1)$ و $C(-1,2,5)$، وأنّ G_k و $\mathbb{E}$ و $\mathbb{F}$ معرّفة كما في السابق.

احسب إحداثيات النقطتين G_1 و G_{-1}، وأثبت أنّ المجموعتين $\mathbb{E}$ و $\mathbb{F}$ متقاطعتان.

احسب نصف قطر الدائرة Γ الناتجة من تقاطع المجموعتين $\mathbb{E}$ و $\mathbb{F}$.

الحل:



① لدينا
$2\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$
$=\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CI}$
ومنه $\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{CI}$ وأيضا $\overrightarrow{AG_{-1}}=-\overrightarrow{CI}$.

② لدينا $(1+k^2)\overrightarrow{AG_k}=(1+k^2)\overrightarrow{AA}+k\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}$
ومنه $(1+k^2)\overrightarrow{AG_k}=-k(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=-k\overrightarrow{BC}$
f مستمر واشتقاقي على المجال $[-1,1]$

$$f'(x)=-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

x	-1		$+1$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

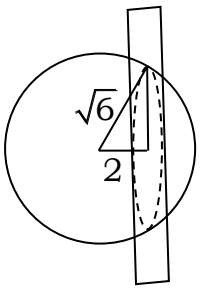
نستنتج أنه عندما تتحول k المجال $[-1,1]$ تتحول $f(k)$ المجال $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ والنقطة G_k تتحول على $[G_{-1}G_1]$.

③ لدينا
$2\overrightarrow{MG_{-1}}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$,
$2\overrightarrow{MG_1}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$
ومنه تنتمي M إلى $\mathbb{E}$ عندما يحقق الشرط $MG_1=MG_{-1}$ أي عندما تكون M إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[G_1G_{-1}]$.

ومنه $\mathbb{E}$ هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[G_1G_{-1}]$.

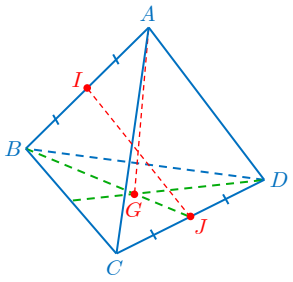
④ لدينا $2\overrightarrow{MG_1}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$،
ولدينا $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{IA}$
ومنه تنتمي M إلى $\mathbb{F}$ إذا تحقق الشرط $MG_1=IA$
أي إذا انتمت M إلى الكرة التي مركزها G_1 ونصف قطرها يساوي IA. ومنه $\mathbb{F}$ هي الكرة التي مركزها G_1 وتمر بالنقطة B.
لأن $\overrightarrow{BG_1}=\overrightarrow{IA}$.

⑤ G_1 هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2),(B,1),(C,-1)$
ومنه
$$\begin{bmatrix}x_{G_1}\\y_{G_1}\\z_{G_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$
ومنه $G_1(0,0,0)$،
وبالمثل نجد $G_{-1}(0,0,4)$.
ونحسب $G_1B=\sqrt{6}$ و $G_1A=2$. ولكن A تقع في منتصف القطعة $[G_1G_{-1}]$ ومنه تنتمي إلى المستوي $\mathbb{E}$ ولأن $G_1A<G_1B$ تكون A تقع داخل الكرة $\mathbb{F}$، ومنه المستوي $\mathbb{E}$ والكرة $\mathbb{F}$ يتقاطعان.



معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[G_1G_{-1}]$ هي $z=2$ وهو يبعد عن مركز الكرة مسافة تساوي 2،
وبما أن نصف قطر الكرة يساوي $\sqrt{6}$ يكون بحسب مبرهنة فيثاغورث أن نصف قطر الدائرة التي تمثل $\mathbb{F}\cap\mathbb{E}$ يساوي $\sqrt{6-2^2}=\sqrt{2}$.

[31] ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم ولنضع $AB = a$.



① نسمي مركز رباعي الوجوه المنتظم $ABCD$ النقطة O مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوس رباعي الوجوه وقد أسندنا إليها الأمثال ذاتها: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

a. أثبت أنّ A و O و G تقع على استقامة واحدة وجد AG و AO.

b. أثبت أنّ O هو منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$.

c. احسب الأطوال OB و OI.

d. أثبت أنّ O متساوية البعد عن جميع رؤوس رباعي الوجوه.

② احسب $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ بأسلوبين أحدهما بكتابة $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB})$.

الحل:

① النقطة O مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوس رباعي الوجوه : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

a. لأنّ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ فإن النقطة O هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(G,3)$ حسب بالخاصة التجميعية، ويكون $\overrightarrow{AO}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ ومنه النقاط A,O,G تقع على استقامة واحدة.

من العلاقة $3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ نجد

$$\begin{aligned}9\overrightarrow{AG}^2&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\\&=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&\quad+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\\&=a^2+a^2+a^2+2\cdot\frac{a^2}{2}+2\cdot\frac{a^2}{2}+2\cdot\frac{a^2}{2}\\&=6a^2\end{aligned}$$

ومنه $AG=\frac{\sqrt{6}}{3}a$، وعليه $AO=\frac{3}{4}AG=\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

b. لما كانت I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,1)$، و J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,1)$ وجدنا أن O مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$ و $(J,2)$.

فيكون O منتصف $[IJ]$.

c. رباعي الوجوه المنتظم متناظر بالنسبة إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ إذن $OB=OA$.

وجدنا أنّ $4\overrightarrow{IO}=2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ وعليه

$$\begin{aligned}16\overrightarrow{IO}^2&=(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\\&=\overrightarrow{AB}^2+4\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\\&\quad+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+4\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}\\&=a^2+4a^2+a^2-4\times\frac{a^2}{2}+2\times0-4\times\frac{a^2}{2}\\&=2a^2\end{aligned}$$

ومنه $OI=\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

d. من كون رباعي الوجوه المعطى منتظم، فإنّ رؤوسه تؤدي أدواراً متماثلة، وعليه فإنّ

$$OA=OB=OC=OD=\frac{\sqrt{6}}{4}a$$

② إن

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}&=(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB})\\&=(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{IA})\\&=OI^2-IA^2=\frac{2a^2}{16}-\frac{a^2}{4}\\&=-\frac{2a^2}{16}\end{aligned}$$

ومن جهة أخرى

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}&=OA\cdot OB\cdot\cos AOB\\&=\frac{6}{16}a^2\cos AOB\end{aligned}$$

إذن $\cos AOB=\frac{-1}{3}$.

سما المجد التعليمية