مذاكرة النواس المرن: نموذج (1) محلول:

النواس المرن:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة لكُل ممّا يأتي:

1) هزازة توافقيّة بسيطة مؤلفة من نابض مرن مهمل الكتلة ثابت صلابته k يحمل في نهايته جسماً m نبضه الخاص ω_0 نستبدل الكتلة $m` = 2m$ والنابض بآخر ثابت صلابته $k` = \frac{k}{2}$،فيكون النبض الخاص النواس الجديد $\omega_0`$ هو:

$\omega_0` = \frac{1}{2}\omega_0$	d	$\omega_0` = 4\omega_0$	c	$\omega_0` = 2\omega_0$	b	$\omega_0` = \frac{1}{4}\omega_0$	a

2) حركة توافقيّة بسيطة سعة اهتزازها X_{max} دورها الخاص T_0 نضاعف سعة الاهتزاز، فيصبح دورها الخاص $T_0`$ يساوي:

$T_0` = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$	d	$T_0` = T_0$	c	$T_0` = \frac{1}{2}T_0$	b	$T_0` = 2T_0$	a

3) يتألف نواس مرن من جسم صلب كتلته (m) معلق بنابض مرن مهمل الكتلة ثابت صلابته k الدور الخاص لحركته T_0، نستبدل بالجسم جسماً آخر كتلته $m` = 8m$ وبالنابض نابضاً آخر ثابت صلابته $k` = \frac{k}{2}$ فيصبح الدور الخاص الجديد $T_0`$:

$T_0` = \frac{1}{2}T_0$	d	$T_0` = 4T_0$	c	$T_0` = 2T_0$	b	$T_0` = \frac{1}{4}T_0$	a

4) تهتز نقطة ماديّة بحركة توافقيّة بسيطة سعتها 5cm، ودورها الخاص π s، فتكون قيمة سرعتها العظمى (طويلة) مقدرة بواحدة $m.s^{-1}$ تساوي:

0.1	d	10	c	0.5π	b	5π	a

السؤال الثاني: أجب عن الأسئلة الآتية:

1. برهن ان محصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم في النواس المرن في كل لحظة هي قوة ارجاع تعطى بالعلاقة $(\bar{F} = -K\bar{x})$ أو بصيغة أخرى جسم كتلته (m) معلق بنابض مرن مهمل الكتلة ثابت صلابته k حلقاته متباعدة:
   a) ادرس جملة (جسم - نابض) في حالة التوازن وأثبت أن $x_0 = \frac{m.g}{k}$.
   b) نشد الجسم عن وضع التوازن مسافة $(\bar{x})$ ونتركه يهتز ادرس جمله (جسم+ نابض) في وضع الحركة وأثبت أن $\bar{F} = -k.\bar{x}$ ؟
2. انطلاقا من العلاقة المعبرة عن قوة الإرجاع في النواس المرن $(\bar{F} = -K\bar{x})$ استنتج طبيعة الحركة ثم استنتج العلاقة المعبرة عن دور حركته ناقش علاقة الدور.

السؤال الثالث: حل المسائل التالية:

المسألة الأولى: تهتز كرة معدنيّة كتلتها m بمرونة نابض شاقولي مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 100\ \mathrm{N.m^{-1}}$، بحركة توافقيّة بسيطة دورها الخاص $T_0 = \frac{\pi}{5}$ s، وبسعة اهتزاز $X_{max} = 12$ cm، باعتبار مبدأ الزمن $t = 0$ لحظة مرور الكرة في موضع مطاله $\frac{X_{max}}{2}$، وهي تتحرك بالاتجاه السالب. المطلوب:

-1 استنتج التابع الزمني لمطال الحركة انطلاقا من شكله العام.
-2 عيّن لحظة المرور الأول للكرة في موضع التوازن، ثمّ احسب سرعتها عندئذٍ.
-3 احسب كتلة الكرة m. واحسب شدّة قوّة الإرجاع في نقطة مطالها $x = 4$ cm
-4 احسب الاستطالة السكونيّة للنابض.
-5 احسب الطاقة الميكانيكيّة (الكليّة) لهذا النواس. باعتبار أنّ $(g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}, \pi^2 = 10)$

الحل:

-1

$$x = X_{max}\cos(\omega_o t + \varphi)$$

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10\,rad.s^{-1}$$

φ من شروط البدء

$$t = 0\,, x = \frac{X_{max}}{2}\,, v < 0$$

$$\frac{X_{max}}{2} = X_{max}.cos\varphi$$

$$cos\varphi = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}\,rad$$

أو $\varphi = -\frac{\pi}{3}\,rad$

$$t = 0\,, v < 0$$

$$v = -\omega_0 X_{max}.\sin(\omega_o t + \varphi)$$

$$v = -\omega_0 X_{max}.\sin\varphi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \rightarrow$$

$$v = -\omega_0 X_{max}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$$ مقبول

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} \rightarrow$$

$$v = -\omega_0 X_{max}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0$$ مرفوض

يخالف شروط البدء

-2

$$x = 12\times10^{-2}\cos\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)\quad m$$

$$x = 0 \rightarrow \cos\left(10t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$10t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

مرور أول $k = 0$

$$10t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \rightarrow 10t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$$

$$t = \frac{\pi}{60}\ s$$

$$v = -\omega_0 X_{max}.\sin(\omega_o t + \varphi)$$

$$v = -10\times12\times10^{-2}.\sin\left(10\times\frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -1.2\sin\frac{\pi}{2} = -1.2\ m.s^{-1}$$

-3

$$k = \omega_0^2\, m \rightarrow m = \frac{100}{100} = 1\ kg$$

$$F = -kx = |-kx| = 100\times0.04$$

$$F = 4\ N$$

-4

$$x_0 = \frac{m\,g}{k} = \frac{1\times10}{100} = 0.1\ m$$

-5

$$E = \frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2}\times100\times(0.12)^2$$

$$E = 72\times10^{-2}\ J$$

المسألة الثانية: هزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نقطة مادية كتلتها $m = 100\ g$ معلقة بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة شاقولي تهتز بدور خاص $1sec$ وبسعة اهتزاز $16\ cm$ فبفرض مبدأ الزمن عندما تكون النقطة المادية في مطالها الأعظمي الموجب. المطلوب:

1. استنتج التابع الزمني لمطال الحركة انطلاقا من شكله العام.
2. عين لحظة المرور الأول للنقطة المادية في مركز الاهتزاز.
3. احسب قيمة السرعة العظمى للنقطة المادية (طويلة).
4. احسب قيمة ثابت صلابة النابض والاستطالة السكونية له.
5. احسب تسارع النقطة المادية لحظة مرورها في وضع مطاله $x = 5\ cm$.
6. احسب الطاقة الميكانيكية لهذه الهزازة. 7. احسب الطاقة الحركية للنقطة المادية عندما يكون مطالها $x = 10\ cm$.

الحل:

$$m = 0.1\ kg\,, T_0 = 1\ s$$

$$X_{max} = 16\times10^{-2}\ \text{m}$$

①

$$x = X_{max}\cos(\omega_o t + \varphi)$$

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.s^{-1}$$

φ من شروط البدء

$$t = 0\,, x = X_{max}$$

$$X_{max} = X_{max}.cos\varphi$$

②

$$.cos\varphi = 1 \rightarrow \varphi = 0$$

$$x = 16\times10^{-2}\cos 2\pi t$$

$$x = 0 \rightarrow \cos 2\pi t = 0$$

$$2\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

مرور أول $k = 0$

$$2\pi t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{1}{4}\ s$$

③

$$v_{max} = \omega_0 X_{max} = 2\pi\times0.16$$

$$v_{max} = 32\,\pi\times10^{-2}\ m.s^{-1}$$

-④

$$k = \omega_0^2.m = 40\times10^{-1}$$

$$k = 4\ N.m^{-1}$$

$$x_0 = \frac{m\,g}{k} = \frac{0.1\times10}{4} = 0.25\ m$$

-⑤

$$a = -\omega_0^2.x = -40\times5\times10^{-2}$$

$$a = -2\ m.s^{-2}$$

-⑥

$$E = \frac{1}{2}kX_{max}^2$$

$$E = \frac{1}{2}\times4\times256\times10^{-4}$$

$$E = 512\times10^{-4}J$$

-⑦

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}\times4\times100\times10^{-4}$$

$$E_p = 200\times10^{-4}J$$

$$E_k = E - E_p = (512-200)10^{-4}$$

$$E_k = 312\times10^{-4}J$$